

**UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**

**Faculdade de Ciências e Tecnologia**

Departamento de Engenharia Civil

**APLICABILIDADE DOS MÉTODOS DO EUROCÓDIGO 2 NA  
VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE PILARES  
EM BETÃO ARMADO DE PONTES**

Carlos Eduardo Brito Águas

(Licenciado)

Dissertação apresentada na  
Faculdade de Ciências e Tecnologias  
para a obtenção do grau de  
**Mestre em Estruturas e Geotecnia**

**Orientador científico**

Doutor António Lopes Batista

**Fevereiro de 2009**



## **Agradecimentos**

O meu agradecimento a todos os que me apoiaram na realização deste trabalho, em particular:

- Ao Prof. António Lopes Batista, orientador científico desta tese, pelos ensinamentos que me soube ministrar, sempre com a maior simpatia, disponibilidade e amizade;
- À Eng<sup>a</sup> Carla Marchão, do DEC/FCT/UNL, pelo apoio prestado na discussão de alguns problemas e na realização das análises numéricas dos efeitos de segunda ordem em alguns exemplos apresentados;
- Aos meus colegas de trabalho do gabinete Via Túnel, pelo apoio e compreensão prestados nos momentos críticos;
- Ao meu amigo e matemático Filipe Tomé, pelo contributo no desenvolvimento dos programas de cálculo automático que apoiaram a elaboração deste trabalho;
- A toda a minha família, nomeadamente aos meus pais, pelo apoio incondicional e carinho.

Finalmente, agradeço à Joana, mulher da minha vida, pelo apoio, compreensão, ajuda e encorajamento constante para o desenvolvimento deste trabalho.



## Resumo

Neste trabalho é realizado um estudo sobre os métodos de verificação da segurança de pilares em betão armado de pontes, comparando os resultados da aplicação dos métodos simplificados propostos no EC2 com os obtidos através de métodos de análise física e geometricamente não lineares.

O trabalho inicia-se com uma introdução à problemática dos efeitos de segunda ordem em pilares de betão armado, sendo analisados os métodos gerais de análise e as metodologias propostas no EC2 e no REBAP.

De seguida é proposta uma técnica complementar aos métodos simplificados de cálculo dos efeitos de segunda ordem para pilares de pontes, que se designou por análise global ponderada. Com esta técnica obteve-se uma melhoria significativa dos resultados.

Apresentam-se os critérios de verificação da capacidade resistente de secções de betão armado em flexão composta e o algoritmo de um programa de cálculo automático que foi desenvolvido para análise de secções com qualquer geometria, cujo funcionamento foi testado com três exemplos de aplicação.

No final são apresentados três casos de estudo em que foram usados os métodos do EC2, considerados “*per si*” e complementados com a técnica proposta nesta tese, e métodos de análise física e geometricamente não linear, desenvolvidos por dois autores distintos. A comparação dos resultados obtidos permitiu tirar conclusões quanto ao campo de aplicação das diferentes metodologias e à sua adequação nos diferentes casos.

## **Abstract**

This work consists in a study about the design methodologies for concrete bridge columns, comparing the results of the application of the simplified EC2 methods with the physic and geometric non-linear analysis methods.

The work begins with an introduction to the second order effect on concrete columns issues, analyzing the general method and also the methodologies proposed on the EC2 and on the REBAP.

A complementary technique to be applied on simplified methods for determination of the second order effects of concrete bridge columns is proposed next, named as global weighted analysis. This technique has revealed significant better results.

The verification criteria of concrete cross sections resistance capability are presented, as well as a software algorithm developed to analyze any kind of geometric cross sections that has been tested with three examples.

At the end there are presented three case study in which were used the EC2 methods, considered individually and complemented with the proposed technique and also physic and geometric non-linear analysis methods, developed by too distinguished authors. The comparison of the obtained results, has allowed to conclude about the application field of the different methodologies and its adequacy on the different cases.

## ÍNDICE GERAL

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. ENQUADRAMENTO .....	1
1.2. OBJECTIVOS.....	2
1.3. ORGANIZAÇÃO DA TESE .....	2
<b>2. EFEITOS DE 2ª ORDEM EM PEÇAS COMPRIMIDAS DE BETÃO ARMADO .....</b>	<b>5</b>
2.1. INSTABILIDADE DE ELEMENTOS COMPRIMIDOS ESBELTOS.....	5
2.2. EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM .....	9
2.3. CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS .....	10
2.4. CRITÉRIO DA ESBELTEZA DOS ELEMENTOS .....	11
2.5. EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM GLOBAIS EM EDIFÍCIOS .....	14
2.5.1. Consideração dos efeitos da fluência .....	15
<b>3. MÉTODOS DE ANÁLISE DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM EM PEÇAS COMPRIMIDAS DE BETÃO ARMADO .....</b>	<b>19</b>
3.1. MÉTODOS PROPOSTOS NO EC2 .....	19
3.1.1. Método geral.....	19
3.1.2. Método da rigidez nominal.....	19
3.1.3. Método da curvatura nominal .....	26
3.1.3.1. Momentos flectores .....	27
3.1.3.2. Cálculo da curvatura.....	28
3.1.4. Verificação da segurança de elementos sujeitos a flexão composta desviada	30
3.1.5. Imperfeições geométricas.....	32
3.2. VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA DE PILARES ISOLADOS PELO REBAP .....	34
3.3. ADAPTAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLISE PARA PILARES DE PONTES .....	37
3.3.1. Considerações gerais .....	37
3.3.2. Técnica de análise global simples .....	38
3.3.3. Técnica de análise global ponderada .....	39
<b>4. CÁLCULO DOS ESFORÇOS RESISTENTES DE SECÇÕES DE BETÃO ARMADO EM FLEXÃO COMPOSTA .....</b>	<b>41</b>
4.1. INTRODUÇÃO .....	41

4.2.	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS.....	41
4.3.	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	43
4.4.	PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO DESENVOLVIDO .....	45
4.4.1.	Funcionamento do programa de cálculo .....	45
4.4.2.	Algoritmo de cálculo .....	48
4.4.3.	Exemplos de aplicação.....	52
4.4.3.1.	Exemplo 1 – Secção rectangular .....	52
4.4.3.2.	Exemplo 2 – Secção quadrada oca .....	53
4.4.3.1.	Exemplo 3 – Secção vazada de geometria mais complexa.....	55
<b>5.</b>	<b>CASOS DE ESTUDO .....</b>	<b>57</b>
5.1.	CASO DE ESTUDO 1 .....	57
5.1.1.	Descrição da estrutura.....	57
5.1.2.	Análise pelos métodos do EC2.....	61
5.1.2.1.	Verificação da necessidade de consideração dos efeitos de segunda ordem .....	61
5.1.2.2.	Método da rigidez nominal .....	63
5.1.2.3.	Método da curvatura nominal.....	64
5.1.3.	Comparação dos resultados obtidos pela AFGNL e pelos métodos simplifica- dos .....	65
5.1.4.	Análise dos resultados obtidos pelos métodos simplificados considerando a globalidade da estrutura .....	66
5.1.4.1.	Ponderação simples das excentricidades de segunda ordem.....	66
5.1.4.2.	Ponderação das excentricidades de segunda ordem de acordo com a rigidez .....	67
5.1.5.	Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos.....	68
5.1.6.	Cálculo da capacidade resistente .....	69
5.2.	CASO DE ESTUDO 2 .....	73
5.2.1.	Descrição da estrutura.....	73
5.2.2.	Materiais.....	75
5.2.3.	Cálculo da capacidade resistente da secção .....	76
5.2.4.	Definição das acções.....	78
5.2.4.1.	Acções permanentes.....	78
5.2.4.2.	Acções variáveis.....	79
5.2.4.3.	Combinação de acções .....	79
5.2.4.4.	Imperfeições geométricas .....	80
5.2.5.	Análise física e geometricamente não linear (AFGNL).....	80
5.2.5.1.	Modelação da estrutura.....	80



5.2.5.2. Critério de segurança .....	80
5.2.5.3. Descrição do modelo de análise .....	83
5.2.5.4. Resultados.....	83
5.2.6. Análise pelos métodos simplificados do EC2.....	84
5.2.6.1. Verificação da necessidade de consideração dos efeitos de segunda ordem .....	84
5.2.6.2. Método da rigidez nominal .....	86
5.2.6.3. Método da curvatura nominal.....	87
5.2.7. Comparação dos resultados obtidos pela AFGNL e pelos métodos simplificados do EC2 .....	88
5.2.8. Análise dos resultados obtidos pelos métodos simplificados considerando a estrutura global .....	89
5.2.8.1. Ponderação simples das excentricidades de segunda ordem.....	89
5.2.8.2. Ponderação das excentricidades de segunda ordem de acordo com a rigidez .....	90
5.2.9. Comparação dos resultados obtidos pelos diferentes métodos .....	91
5.2.10. Verificação da capacidade resistente .....	92
5.3. CASO DE ESTUDO 3 .....	95
5.3.1. Descrição da estrutura.....	95
5.3.2. Materiais.....	95
5.3.3. Acções e combinações de acções.....	95
5.3.3.1. Definição de acções .....	95
5.3.3.2. Combinação de acções .....	96
5.3.3.3. Imperfeições geométricas .....	96
5.3.4. Análise física e geometricamente não linear.....	96
5.3.4.1. Modelação da estrutura e critérios de segurança .....	96
5.3.4.2. Descrição do modelo utilizado .....	97
5.3.4.3. Resultados.....	97
5.3.5. Análise pelos métodos simplificados do EC2.....	98
5.3.5.1. Verificação da necessidade de consideração dos efeitos de segunda ordem .....	98
5.3.5.2. Método da rigidez nominal .....	99
5.3.5.3. Método da curvatura nominal.....	101
5.3.6. Comparação dos resultados obtidos pela AFGNL e pelos métodos simplificados do EC2 .....	102
5.3.7. Análise dos resultados obtidos pelos métodos simplificados considerando a globalidade da estrutura .....	103
5.3.7.1. Ponderação simples das excentricidades de segunda ordem.....	103
5.3.7.2. Ponderação das excentricidades de segunda ordem de acordo com a rigidez .....	104

5.3.8.	Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos.....	104
5.3.9.	Verificação da capacidade resistente .....	105
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>109</b>
<b>7.</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>111</b>

## Índice de Figuras

Figura 2-1 - Modelo de coluna sujeita a esforço axial. Efeitos geométricos de 2ª ordem. ....	5
Figura 2-2 – Curva de Euler truncada no valor limite de compressão admissível do material. ....	8
Figura 2-3 - Modelo tipo de estrutura sujeita a efeitos globais de segunda ordem. ....	9
Figura 2-4 - Modelo tipo de estrutura sujeita a efeitos locais de segunda ordem. ....	10
Figura 2-5 – Comprimentos de encurvadura de colunas para diferentes condições de fronteira. ....	12
Figura 2-6 - Variação do carregamento e das deformações ao longo do tempo ....	16
Figura 2-7 - Ábacos do EC2 para a determinação do coeficiente de fluência ....	18
Figura 3-1 - Momento equivalente em caso de momentos de extremidade diferentes. ....	25
Figura 3-2 - Comparação entre as soluções exacta e a de momento equivalente. ....	26
Figura 3-3 - Modelo tipo de estrutura com tabuleiro de nós móveis ....	37
Figura 3-4 - Excentricidades de segunda ordem em cada pilar. ....	38
Figura 4-1 – Diagrama tensão-deformação (parábola-rectângulo) para betão sujeito a compressão. ....	42
Figura 4-2 – Diagrama tensão-deformação para o aço em tracção e compressão. ....	42
Figura 4-3 - Extensões limites no betão e nas armaduras ....	43
Figura 4-4 – Divisão da secção em fatias. ....	47
Figura 4-5 – Largura média de cada fatia. ....	47
Figura 4-6 – Esquema de posicionamento das armaduras numa secção ....	48
Figura 4-7 Secção rectangular de betão armado sujeita a um esforço de compressão. ....	52
Figura 4-8 – Secção oca de betão armado sujeita a flexão composta ....	53
Figura 4-9 Diagrama de interacção $M_{rd}-N_{rd}$ ....	54
Figura 4-10 – Secção oca de betão armado, sujeita a flexão composta. ....	55
Figura 4-11 - Diagrama de interacção $M_{rd}-N_{rd}$ ....	56
Figura 5-1 – Pórtico considerado no caso de estudo 1 ....	58
Figura 5-2 – Geometria da secção dos pilares. ....	69
Figura 5-3 – Diagrama de interacção $M_{Rd} - N_{Rd}$ para o pilar P1, com indicação dos esforços actuantes de cálculo. ....	70
Figura 5-4 - Diagrama de interacção $M_{rd} - N_{rd}$ para os pilares P2-P3, com representação dos esforços actuantes de cálculo. ....	71
Figura 5-5 – Corte longitudinal do viaduto. ....	73

Figura 5-6 - Alçado do pilar e corte transversal do tabuleiro. ....	74
Figura 5-7 – Geometria da secção transversal dos pilares.....	75
Figura 5-8 - Diagrama de interacção $M_{rd} - N_{rd}$ .....	77
Figura 5-9 – Modelo de cálculo adoptado para a estrutura. ....	83
Figura 5-10 – Diagrama de interacção $M_{rd} - N_{rd}$ , com representação dos esforços obtidos na análise dos pilares isolados considerando o método da rigidez equivalente. ....	93
Figura 5-11 – Diagrama de interacção $M_{rd} - N_{rd}$ , com representação dos esforços obtidos na análise global ponderada considerando o método da rigidez equivalente.....	93
Figura 5-12 – Diagrama de interacção $M_{rd} - N_{rd}$ , com representação dos esforços obtidos na análise física e geometricamente não linear. ....	94
Figura 5-13 – Corte longitudinal do viaduto.....	95
Figura 5-14 – Modelo de cálculo adoptado para a estrutura. ....	97
Figura 5-15 – Diagrama de interacção $M_{rd} - N_{rd}$ , com representação dos esforços resultantes da análise dos pilares isolados pelo método da estimativa da curvatura.....	106
Figura 5-16 – Diagrama de interacção $M_{rd} - N_{rd}$ , com representação dos esforços resultantes da análise global ponderada. ....	106
Figura 5-17 – Diagrama de interacção $M_{Rd} - N_{Rd}$ , com representação dos esforços resultantes da análise não linear.....	107

## Índice de Quadros

Quadro 3-1 Valores a adoptar para $a$ .....	31
Quadro 4-1 Camadas de armaduras consideradas.....	52
Quadro 4-2 Camadas de armaduras consideradas.....	54
Quadro 4-3 – Camadas de armaduras consideradas.....	55
Quadro 5-1 – Dados da estrutura do caso de estudo 1 .....	58
Quadro 5-2 - Resultados do dimensionamento efectuado pelo método do pilar padrão.....	59
Quadro 5-3 - Armaduras resultantes do dimensionamento efectuado pelo método do pilar padrão. ....	59
Quadro 5-4 Resultados da análise física e geometricamente não linear realizada para $A_{s1}$ (P1)= $A_{s2}$ (P1)=135cm <sup>2</sup> e $A_{s1}$ (P2,P3)= $A_{s2}$ (P2,P3)=620 cm <sup>2</sup> .....	60
Quadro 5-5 - Resultados na análise física e geometricamente não linear realizada para $A_{s1}$ (P1)= $A_{s2}$ (P1)=181 cm <sup>2</sup> e $A_{s1}$ (P2,P3)= $A_{s2}$ (P2,P3)= 620cm <sup>2</sup> .....	60
Quadro 5-6 - Resultados na análise física e geometricamente não linear realizada para $A_{s1}$ (P1)= $A_{s2}$ (P1)=198 cm <sup>2</sup> e $A_{s1}$ (P2,P3)= $A_{s2}$ (P2,P3)=120 cm <sup>2</sup> . ....	61
Quadro 5-7 - Esforços de dimensionamento.....	61
Quadro 5-8 – Cálculo da esbelteza.....	62
Quadro 5-9 – Cálculo do coeficiente de fluência efectivo.....	62
Quadro 5-10 – Cálculo da esbelteza limite.....	62
Quadro 5-11 – Comparativo entre a esbelteza e a esbelteza limite .....	62
Quadro 5-12 Estimativa da rigidez nominal.....	63
Quadro 5-13 – Esforços de 1ª ordem.....	63
Quadro 5-14 – Determinação dos momentos de dimensionamento.....	64
Quadro 5-15 Determinação da excentricidade de segunda ordem.....	64
Quadro 5-16 Determinação dos momentos de dimensionamento.....	65
Quadro 5-17 - Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos - esforços actuantes.....	65
Quadro 5-18 - Excentricidades equivalentes.....	66
Quadro 5-19 – Esforços obtidos com a média das excentricidades de 2ª ordem .....	67
Quadro 5-20 – Esforços calculados pela técnica de análise global ponderada .....	67
Quadro 5-21 – Resumo geral dos resultados obtidos .....	68
Quadro 5-22 – Armaduras consideradas na secção do pilar P1 .....	69

Quadro 5-23– Armaduras consideradas na secção dos pilares P2 e P3.....	69
Quadro 5-24 – Esforços resistentes obtidos para a secção da base do pilar P1 .....	70
Quadro 5-25 - Esforços resistentes obtidos para a secção da base dos pilares P2 e P3 .....	71
Quadro 5-26 – Características do betão C35/45 .....	75
Quadro 5-27 – Características do aço A500 NR .....	75
Quadro 5-28 – Quantidades e localização de armaduras .....	76
Quadro 5-29 – Resumo de esforços resistentes obtidos .....	77
Quadro 5-30 – Valores obtidos para o peso próprio do tabuleiro e pilares .....	78
Quadro 5-31 – Deformações impostas consideradas para o tabuleiro .....	79
Quadro 5-32 – Valor das excentricidades iniciais a considerar no dimensionamento dos pilares .....	80
Quadro 5-33 – Coeficientes parciais de segurança dos materiais adoptados na análise não linear (AFGNL).....	81
Quadro 5-34 – Características consideradas para definição da relação constitutiva do betão .....	81
Quadro 5-35 - Características consideradas para definição da relação constitutiva do aço .	81
Quadro 5-36 – Valores de cálculo dos módulos de elasticidade efectivo e ajustado.....	82
Quadro 5-37 – Variação de temperatura corrigida para simular os efeitos da retracção - análise com coeficientes parciais de segurança para as propriedades dos materiais. ....	82
Quadro 5-38 – Determinação do encurtamento a considerar para o tabuleiro devido à retracção.....	82
Quadro 5-39 – Cálculo da excentricidade inicial corrigida.....	83
Quadro 5-40 – Resumo dos resultados da análise não linear .....	84
Quadro 5-41 – Resumo dos esforços nos pilares .....	84
Quadro 5-42 – Cálculo da esbelteza.....	85
Quadro 5-43 – Cálculo do coeficiente de fluência efectivo .....	85
Quadro 5-44 – Esbelteza limite .....	85
Quadro 5-45 – Comparação entre a esbelteza e a esbelteza limite .....	85
Quadro 5-46 – Cálculo da rigidez nominal .....	86
Quadro 5-47 – Esforços de 1ª ordem recalculados .....	86
Quadro 5-48 – Cálculo dos momentos de dimensionamento .....	87
Quadro 5-49 - Determinação da excentricidade de segunda ordem. ....	87
Quadro 5-50 - Determinação dos esforços de dimensionamento.....	88
Quadro 5-51 - Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos - esforços actuantes de cálculo .....	88

Quadro 5-52 – Excentricidades equivalentes de 2ª ordem.....	89
Quadro 5-53 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação simples das excentricidades dos diferentes pilares .....	90
Quadro 5-54 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação global das excentricidades dos diferentes pilares .....	91
Quadro 5-55 – Resumo geral dos resultados.....	91
Quadro 5-56 – Valor das excentricidades iniciais a considerar no dimensionamento dos pilares .....	96
Quadro 5-57 – Resumo dos resultados da análise não linear .....	97
Quadro 5-58 – Resumo dos esforços de 1ª ordem nos pilares .....	98
Quadro 5-59 – Cálculo da esbelteza.....	98
Quadro 5-60 – Cálculo do coeficiente de fluência efectivo .....	99
Quadro 5-61 – Esbelteza limite .....	99
Quadro 5-62 – Comparativo entre a esbelteza e a esbelteza limite .....	99
Quadro 5-63 – Cálculo da rigidez nominal .....	100
Quadro 5-64 – Esforços de 1ª ordem recalculados .....	100
Quadro 5-65 – Cálculo dos momentos de dimensionamento .....	100
Quadro 5-66 - Determinação da excentricidade de segunda ordem. ....	101
Quadro 5-67 - Determinação dos esforços de dimensionamento.....	102
Quadro 5-68 - Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos - esforços actuantes de cálculo .....	102
Quadro 5-69 – Excentricidades equivalentes de 2ª ordem.....	103
Quadro 5-70 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação simples das excentricidades dos diferentes pilares .....	103
Quadro 5-71 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação global das excentricidades das diferentes pilares .....	104
Quadro 5-72 – Resumo geral dos resultados.....	105





# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. ENQUADRAMENTO

Os regulamentos e normas de estruturas de betão armado, nomeadamente o actual regulamento português [REBAP, 1983] e o Eurocódigo 2 [EC2, 2004], consideram que a verificação da segurança dos pilares ao estado limite último de encurvadura pode, de uma maneira geral, ser reduzida à verificação do estado limite último de resistência por flexão com compressão em determinadas secções críticas dos pilares. Essa verificação deve ser efectuada separadamente em cada uma das direcções principais de inércia e complementada com uma verificação que inclua simultaneamente as duas direcções. Esta última verificação pode ser dispensada se as secções críticas nas duas direcções não ocorrerem na mesma zona dos pilares.

Os regulamentos estipulam, em regra, que os efeitos de 2ª ordem na verificação da segurança dos pilares de betão armado devem ser considerados quando é ultrapassado um valor limite de esbelteza e propõem, para os casos correntes, a utilização de métodos simplificados, em geral conservativos. Em alternativa permitem a utilização de análises física e geometricamente não linear das estruturas. No entanto, apesar de actualmente já existirem programas de cálculo que permitem realizar este tipo de análises, tal não é viável, em tempo útil, nas estruturas correntes, só se justificando em estruturas de maior dimensão e complexidade.

O EC2 apresenta dois métodos simplificados de verificação da segurança de pilares, que estão essencialmente direccionados para estruturas de edifícios. Quando estes métodos são aplicados às pontes surgem algumas dificuldades, relacionadas com a maior esbelteza dos pilares, apesar das secções serem dotadas, em regra, de grandes resistências. Assim, a utilização destes métodos simplificados pode não ser adequada no caso dos pilares de pontes, pois podem conduzir a valores de dimensionamento exagerados, penalizando a utilização racional dos materiais.

No presente trabalho não foram consideradas as disposições relativas a pontes, da parte do EC2 específica deste tipo de estruturas, por este documento não incluir recomendações adicionais nesta matéria.

## *1.2. OBJECTIVOS*

Com o presente trabalho pretendeu-se:

- Realizar um estudo dos métodos do EC2 para a verificação de segurança de pilares, em particular de pilares de pontes;
- Desenvolver uma metodologia mais adequada de aplicação, para os pilares de pontes, dos métodos simplificados de determinação dos efeitos de segunda ordem do EC2;
- Elaborar um programa de cálculo automático para a verificação da capacidade resistente de secções de betão armado em flexão composta;
- Efectuar análises comparativas dos métodos do EC2, utilizados directamente e complementados com a técnica proposta, e de métodos de análise física e geometricamente não linear, com vista à avaliação dos seus campos de aplicabilidade.

## *1.3. ORGANIZAÇÃO DA TESE*

Esta tese encontra-se organizada em seis capítulos, constituindo a introdução ao tema o primeiro deles.

No capítulo dois são abordados os conceitos teóricos relativos à estabilidade de elementos comprimidos e são apresentados os parâmetros relevantes na avaliação da necessidade de consideração dos efeitos de segunda ordem em peças de betão armado, tendo em consideração as disposições do EC2.

No capítulo três são descritos os dois métodos simplificados do EC2 e o método apresentado no REBAP para a determinação dos efeitos de segunda ordem em pilares de betão armado. É também apresentada uma metodologia complementar, proposta nesta tese, para aplicação dos métodos simplificados ao caso particular dos pilares de pontes.

No capítulo quatro é apresentada a base teórica de cálculo da capacidade resistente de secções de betão armado em flexão composta, bem como o algoritmo utilizado num programa de cálculo desenvolvido, terminando com a apresentação de exemplos de teste do programa.

No capítulo cinco são apresentados três casos de estudo, em que é efectuada a verificação de segurança de pilares em betão armado de pontes, considerando uma análise física e geometricamente não linear, os métodos simplificados propostos no EC2 e a sua extensão para a metodologia desenvolvida nesta tese.

Por último, no capítulo seis são apresentadas as conclusões relativamente ao trabalho realizado.



## 2. EFEITOS DE 2ª ORDEM EM PEÇAS COMPRIMIDAS DE BETÃO ARMADO

### 2.1. INSTABILIDADE DE ELEMENTOS COMPRIMIDOS ESBELTOS

A análise da estabilidade de uma peça linear comprimida, de comportamento elástico linear, pode ser feita através da resolução das equações diferenciais de equilíbrio ou pelo método energético, sendo que ambas conduzem a resultados idênticos.

A configuração deformada de uma coluna homogénea de secção constante, submetida a um esforço axial, é representada na Figura 2.1.

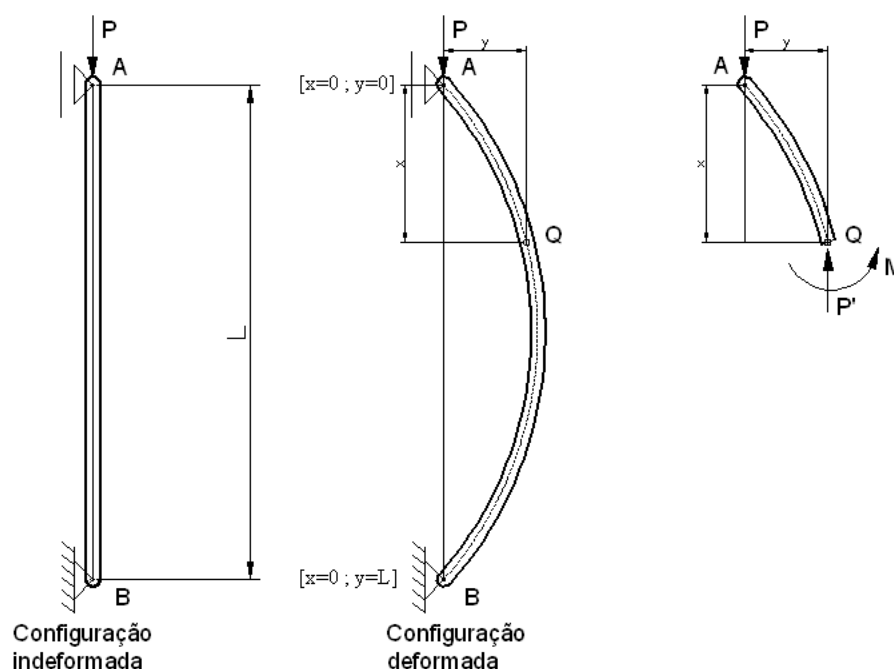


Figura 2-1 - Modelo de coluna sujeita a esforço axial. Efeitos geométricos de 2ª ordem.

Considerando o diagrama de corpo livre de um trecho da coluna, obtêm-se,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI} y$$

( 2-1)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} y = 0$$

( 2-2)

sendo uma equação diferencial homogénea de 2ª ordem, de coeficientes constantes. Fazendo,

$$p^2 = \frac{P}{EI}$$

( 2-3)

a equação toma a forma,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = 0$$

( 2-4)

que é semelhante à equação diferencial do movimento harmónico simples (a distância  $x$  substitui o tempo  $t$ ). A sua solução geral é,

$$y = A \cdot \sin(px) + B \cdot \cos(px)$$

( 2-5)

sendo as condições de fronteira as seguintes,

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x = L \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A \cdot \sin(pL) = 0$$

Nesta última condição,  $A \sin(pL) = 0$  é verificada se  $A = 0$  ou se  $\sin(pL) = 0$ . No primeiro caso ( $A = 0$ ), a coluna permanece indeformada; no segundo caso ( $\sin(pL) = 0$ ), é necessário que  $pL = n \cdot \pi$  ou que,

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l_0^2}$$

( 2-6)

O menor dos valores de P corresponde a  $n = 1$ , sendo,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

( 2-7)

em que:

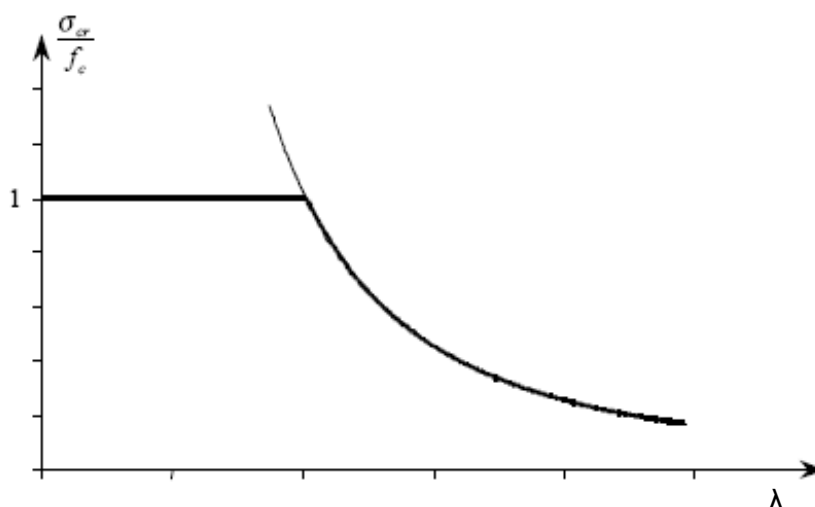
$l_0$  – é o comprimento de encurvadura;

$E$  - é o módulo de elasticidade;

$I$  - é o momento de inércia da secção.

A expressão ( 2-7) é designada por fórmula de Euler. Permite determinar a carga crítica, que é a carga limite de uma coluna com comportamento elástico linear sujeita a esforço axial, antes da ocorrência de rotura por encurvadura. A partir do valor  $P_{cr}$  não é garantido o equilíbrio, ocorrendo rotura. A carga crítica tende para infinito quando o comprimento de encurvadura  $l_0 \rightarrow 0$ .

A fórmula de Euler só pode ser usada se o material tiver um módulo de elasticidade constante em todo o intervalo de carga, isto é, desde a tensão nula até ao limite de resistência à compressão do material. Uma vez que todos os materiais têm uma tensão limite à compressão, a fórmula de Euler tem de ser truncada nesse limite (Figura 2-2).



**Figura 2-2 – Curva de Euler truncada no valor limite de compressão admissível do material.**

O betão armado é um material que exhibe relações tensões-deformações não lineares, com resistências distintas quando sujeito a compressão e a tracção. Estas relações dependem ainda de outros factores como a fluência, a idade do betão, os teores de humidade, os níveis e histórias de carregamento, a quantidade de armaduras e sua disposição, etc.

Em geral, a rotura por encurvadura das peças de betão armado não se reveste de grande importância, visto que, devido às resistências limitadas das secções, o estado limite último está condicionado pelo limite máximo de tensão na secção e raramente por encurvadura da peça. Contudo, esta situação é distinta em peças esbeltas. Assim, toma adicional relevância quando se trata de analisar pilares de pontes e viadutos, onde são utilizadas peças de média e grande altura com betões de elevada resistência, o que torna a encurvadura no fenómeno condicionante em muitos dos casos. Acresce que o comportamento das colunas sujeitas a compressão é influenciado pelo desalinhamento e excentricidade da carga aplicada ou por irregularidades geométricas.

Verifica-se que, para colunas esbeltas (esbelteza  $\lambda = l_0/i$  com valores elevados sendo  $i$  o raio de giração da secção), a fórmula de Euler descreve bem as condições de rotura. A carga crítica depende de  $E$  e não de  $\sigma_c$  (tensão de rotura à compressão). Para colunas curtas (com baixos valores de  $\lambda$ ), a rotura deve-se essencialmente à cedência plástica, sendo condicionada pelo valor  $\sigma_c$ . Nas colunas designadas por intermédias a rotura depende de  $E$  e de  $\sigma_c$ , sendo dimensionadas, em regra, recorrendo a fórmulas empíricas.



Conforme foi referido, o cálculo de colunas de betão armado necessita do recurso a métodos adaptados à especificidade do material em causa, sendo por isso determinante o uso de metodologias de análise que verifiquem não só a capacidade resistente da secção, mas que também entrem em linha de conta com os fenómenos relacionados com as deformações transversais, os quais podem ser quantificados através de uma análise adequada dos efeitos de segunda ordem.

## 2.2. EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM

Os efeitos de segunda ordem podem ser decompostos em dois tipos:

**a) Efeitos de segunda ordem globais** – que correspondem à parcela dos deslocamentos relativos dos nós dos elementos estruturais, considerando a deformação global da estrutura como a linha poligonal definida pelas cordas. Estes efeitos são causados pelas solicitações horizontais e ocorrem quando a estrutura é susceptível a deslocamentos horizontais (nós móveis). Os diagramas de momentos flectores adicionais (em relação aos momentos de primeira ordem) têm variação linear.

**b) Efeitos de segunda ordem locais** – que correspondem à parcela dos deslocamentos das configurações deformadas de cada elemento da estrutura em relação à posição da corda definida pelas suas extremidades. Estes efeitos são causados pelos esforços axiais de compressão nos elementos. Os diagramas de momentos flectores gerados apresentam uma variação não linear.

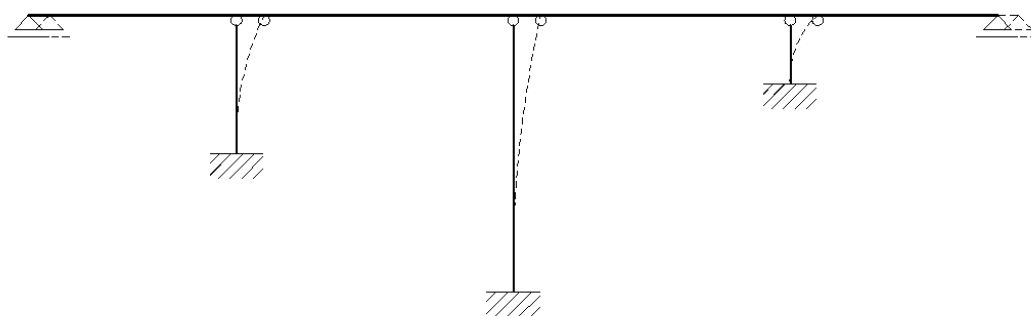
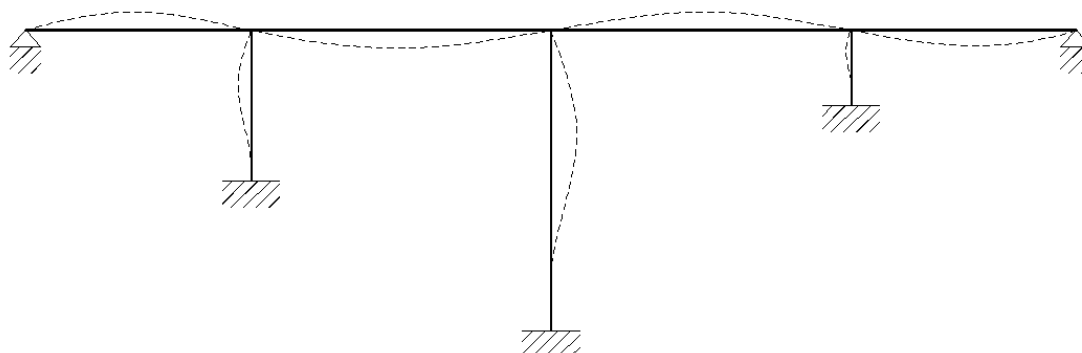


Figura 2-3 - Modelo tipo de estrutura sujeita a efeitos globais de segunda ordem.



**Figura 2-4 - Modelo tipo de estrutura sujeita a efeitos locais de segunda ordem.**

### 2.3. CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS

Para definir as estruturas que possuem elementos verticais de elevada rigidez, que garantem a estabilidade da estrutura quando submetidas a forças horizontais, o EC2 define o conceito de contraventamento.

O contraventamento é constituído por um conjunto de elementos de elevada rigidez, com capacidade de absorver e resistir às acções horizontais da estrutura. Devido à sua elevada rigidez, os contraventamentos reduzem significativamente as deformações laterais da estrutura, contribuindo decisivamente para a estabilidade do conjunto. Usualmente esses elementos são núcleos de paredes, paredes, pilares robustos e outros elementos, verticais ou diagonais, de elevada rigidez. Mesmo que se consiga controlar a deformabilidade lateral entre os diversos níveis de uma estrutura, é possível, em estruturas com alguma esbelteza, que se gerem efeitos de segunda ordem, que terão de ser considerados na análise e no dimensionamento.

O sistema de contraventamento deve possuir uma rigidez suficiente para garantir a estabilidade dos elementos contraventados e transmitir à fundação a totalidade das solicitações horizontais.

## 2.4. CRITÉRIO DA ESBELTEZA DOS ELEMENTOS

Segundo o ponto 5.8.2 (6) do EC2, os efeitos de segunda ordem podem ser desprezados se apresentarem um valor inferior a 10% do valor do momento de primeira ordem.

O EC2 apresenta um critério que determina a necessidade da consideração dos efeitos de segunda ordem, com base na avaliação da esbelteza das peças isoladas. Este critério define um valor de esbelteza limite a partir do qual se torna necessário determinar os efeitos de segunda ordem.

O valor da esbelteza limite, ou “esbelteza mínima”, como é designada no ponto 5.8.3.1 do EC2, pode ser obtido pela expressão,

$$\lambda = \frac{l_0}{i} < \lambda_{lim} \quad (2-8)$$

em que,

$$\lambda_{lim} = \frac{20 \cdot A \cdot B \cdot C}{\sqrt{n}} \quad (2-9)$$

com,

$$A = 1 / (1 + 0,2\varphi_{ef}) \quad (\text{se o valor de } \varphi_{ef} \text{ não for conhecido, pode ser usado o valor } A=0,7)$$

$$B = 1 + 2\omega \quad (\text{se o valor de } \omega \text{ não for conhecido, pode ser usado o valor } B = 1,1)$$

$$C = 1,7 - r_m \quad (\text{se o valor de } r_m \text{ não for conhecido, pode ser usado o valor } C = 0,7)$$

$\varphi_{ef}$  é o coeficiente de fluência efectivo, ver expressão (2-15);

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} \quad \text{é a percentagem mecânica de armadura;}$$

$A_s$  é a área de armadura passiva longitudinal;

$n = \frac{N_{Sd}}{A_c \cdot f_{cd}}$  é o esforço normal reduzido;

$r_m = \frac{M_{01}}{M_{02}}$  é o coeficiente dos momentos;

sendo  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  os momentos de primeira ordem nas extremidades, com  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$ .

Se os momentos das extremidades  $M_{01}$  e  $M_{02}$  provocarem tensões no mesmo lado da secção, então  $r_m$  deve ser tomado com valor positivo (i.e.  $C \leq 1,7$ ), caso contrário deve ser tomado como negativo (i.e.  $C \geq 1,7$ ).

Nos casos seguintes  $r_m$  deve tomar o valor de 1,0 (i.e.  $C = 0,7$ ):

- para membros contraventados, em que o momento de primeira ordem seja resultante apenas, ou predominantemente, de imperfeições ou carregamento transversal;
- para membros não contraventados, em geral.

Para situações de peças isoladas, ou com condições de fronteira bem definidas, o valor de  $l_0$  pode ser obtido a partir da Figura 2-5.

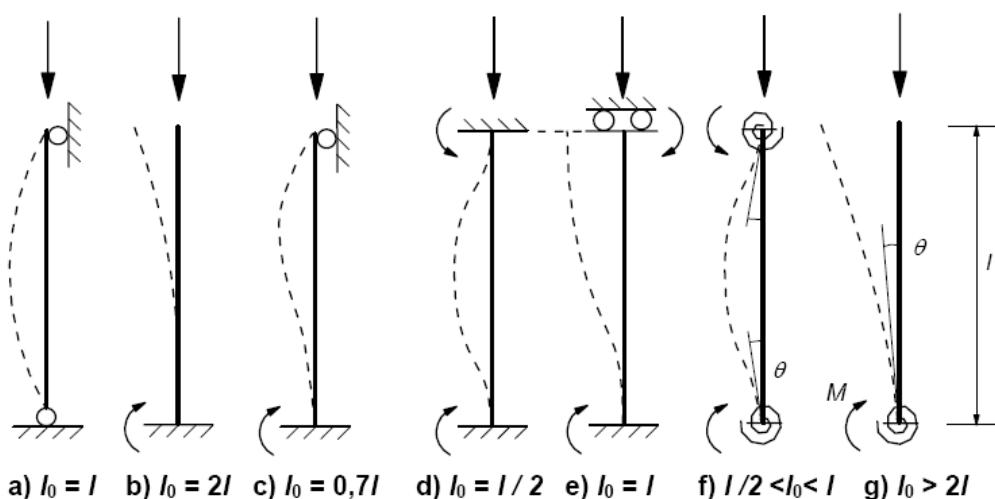


Figura 2-5 – Comprimentos de encurvadura de colunas para diferentes condições de fronteira.

No EC2, ponto 5.8.3.2, são fornecidos os elementos necessários à obtenção, de forma simplificada, dos valores de  $l_0$  para elementos comprimidos inseridos em pórticos, através das expressões que se apresentam de seguida.

Para elementos contraventados:

$$l_0 = 0,5 \cdot l \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)}$$

( 2-10)

Para elementos não contraventados:

$$l_0 = l \cdot \max \left\{ \sqrt{1 + 10 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}}; \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \right\}$$

( 2-11)

em que,

$k_1$  e  $k_2$  – flexibilidades relativas de rotação das restrições das extremidades 1 e 2,

respectivamente, sendo  $k = \frac{\theta \cdot EI}{M \cdot l}$ ;

$\theta$  – rotação dos elementos convergentes numa extremidade para o momento M;

$EI$  – rigidez de flexão do elemento comprimido;

$l$  – distância livre do elemento entre os nós.

O EC2 refere ainda que devem ser considerados os seguintes valores de k:

$k = 0$  corresponde ao limite mínimo teórico para a restrição de rotação;

$k = \infty$  corresponde ao limite máximo teórico para a ausência de restrição.

No entanto, uma vez que a rigidez de rotação total é inexistente na prática, é recomendado o valor mínimo de 0,1 para  $k_1$  e  $k_2$ .

Na definição do comprimento de encurvadura a rigidez dos elementos de restrição deve incorporar o efeito da fendilhação, salvo se for demonstrado que no elemento não se pode desenvolver fendilhação. Contudo, não fornece qualquer indicação sobre como tal efeito deve ser contabilizado.

Para situações em que não seja possível utilizar o método simplificado, como seja o caso de elementos com esforço axial variável ou de secção variável, deverá recorrer-se a um valor baseado na determinação da carga crítica  $N_B$  e da rigidez teórica de flexão para o elemento comprimido  $EI$ ,

$$I_0 = \pi \sqrt{\frac{EI}{N_B}}$$

( 2-12)

## 2.5. EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM GLOBAIS EM EDIFÍCIOS

Como alternativa ao método geral apresentado no ponto 5.8.2. do EC2, a consideração dos efeitos globais de segunda ordem podem ser dispensados se,

$$F_{V,Ed} \leq k_1 \cdot \frac{n_s}{n_s + 1,6} \cdot \frac{\sum E_{cd} I_c}{L^2}$$

( 2-13)

em que,

$F_{V,Ed}$  é a carga total vertical (nos elementos contraventados e de contraventamento);

$N_s$  é o numero de pisos da estrutura;

$L$  é a altura total do edifício acima do nível de restrição dos momentos (solo);

- $E_{cd}$  é o valor de cálculo do módulo de elasticidade do betão;
- $I_c$  é o momento de inércia dos elementos de contraventamento correspondente ao estado não fendilhado;
- $k_1$  é uma constante cujo valor deve ser previsto nos anexos nacionais, sendo o valor recomendado de 0,31. Caso os elementos de contraventamento se encontrem em estado não fendilhado, para o estado limite último pode ser substituído por  $k_2$ , com os valores indicados nos anexos nacionais, sendo o valor recomendado de 0,61.

A expressão anterior só é válida se:

- A estrutura não puder ser condicionada pela instabilidade à torção, isto é, a estrutura tem de ser razoavelmente simétrica;
- As deformações de corte globais na estrutura forem desprezáveis (a estrutura deve possuir paredes resistentes com poucas aberturas);
- Os elementos de contraventamento estiverem rigidamente ligados à base;
- Os elementos de contraventamento forem de secção aproximadamente constante em altura;
- A carga vertical total aumentar aproximadamente o mesmo valor em cada piso.

### **2.5.1. Consideração dos efeitos da fluência**

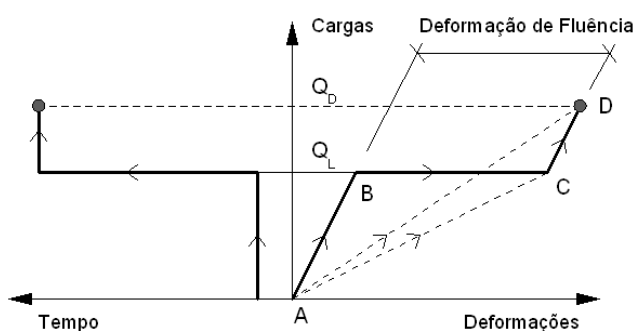
O EC2 determina que os efeitos da fluência devem ser tidos em conta na análise dos efeitos de segunda ordem, considerando a duração das acções envolvidas na combinação considerada.

Numa aproximação inicial, seria possível calcular a deformação causada pela fluência para as cargas permanentes, e então analisar toda a estrutura para a carga adicional até ao carregamento de dimensionamento. Com o coeficiente de fluência efectivo, a análise pode ser feita directamente com as cargas de dimensionamento.

A figura seguinte ilustra um historial hipotético de carregamento correspondente a deformações. O carregamento total é assumido como cargas existentes na maior parte do tempo  $Q_L$  (correspondendo à combinação frequente) e o adicional de curto prazo até à carga

de dimensionamento  $Q_D$ , aplicadas após um “período longo”. O historial de carga pode ser dividido em três partes:

- AB – deformação elástica do carregamento de longo prazo  $Q_L$ ;
- BC– deformação de fluência do carregamento constante  $Q_L$ , calculada através do coeficiente de fluência total  $\varphi$ ;
- CD– deformação elástica do carregamento adicional ( $Q_D - Q_L$ ).



**Figura 2-6 - Variação do carregamento e das deformações ao longo do tempo**

A deformação total do carregamento de longo prazo pode também ser calculada directamente usando o módulo de elasticidade equivalente do betão  $E_e = E_c / (1 + \varphi)$ , que corresponde à linha AC da Figura 2-6. A deformação total do carregamento de dimensionamento pode ser calculado de forma semelhante se for usado o coeficiente de fluência efectivo  $\varphi_{ef}$ , que corresponde à linha AD da Figura 2-6. O módulo de elasticidade efectivo para o betão seria então,

$$E_{ef} = E_c / (1 + \varphi_{ef}) \quad (2-14)$$

onde  $\varphi_{ef}$  é o coeficiente de fluência efectivo.

A duração de actuação das cargas pode ser tida em conta, de um modo simplificado, através do coeficiente  $\varphi_{ef}$  (“coeficiente de fluência efectiva”), o qual, usado em conjunto com



as acções de dimensionamento, permite obter uma deformação de fluência (curvatura) correspondente à combinação de acções quase permanente.

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty;t0)} \cdot \frac{M_{0qp}}{M_{0Sd}} \quad (2-15)$$

em que,

$\varphi_{(\infty;t0)}$  é o coeficiente de fluência, tal como definido no ponto 3.1.4 do EC2;

$M_{0qp}$  é o momento de primeira ordem para a combinação de acções quase permanente;

$M_{0Sd}$  é o momento de primeira ordem para a combinação de acções fundamental;

É também necessário verificar se o coeficiente  $\frac{M_{0qp}}{M_{0Sd}}$  tem uma variação significativa nos elementos da estrutura, podendo então considerar-se, para efeitos de cálculo, o coeficiente do elemento sujeito a um maior esforço de flexão ou, em alternativa, pode ser usado um coeficiente de majoração gravoso.

Os efeitos da fluência podem ser desprezados, isto é,  $\varphi_{ef}=0$ , se as três condições seguintes forem verificadas:

$$\begin{aligned} \varphi_{(\infty;t0)} &\leq 2 \\ \lambda &\leq 75 \\ \frac{M_{0Sd}}{N_{Sd}} &\geq h \quad - \text{predominância de flexão} \end{aligned}$$

sendo  $h$  a altura da secção na direcção correspondente.

O valor do coeficiente de fluência  $\varphi_{(\infty; t_0)}$  pode ser obtido a partir dos ábacos do EC2, ponto 3.1.4., em que é considerada a idade do betão, a sua classe de resistência e a humidade relativa do ar (Figura 2-7).

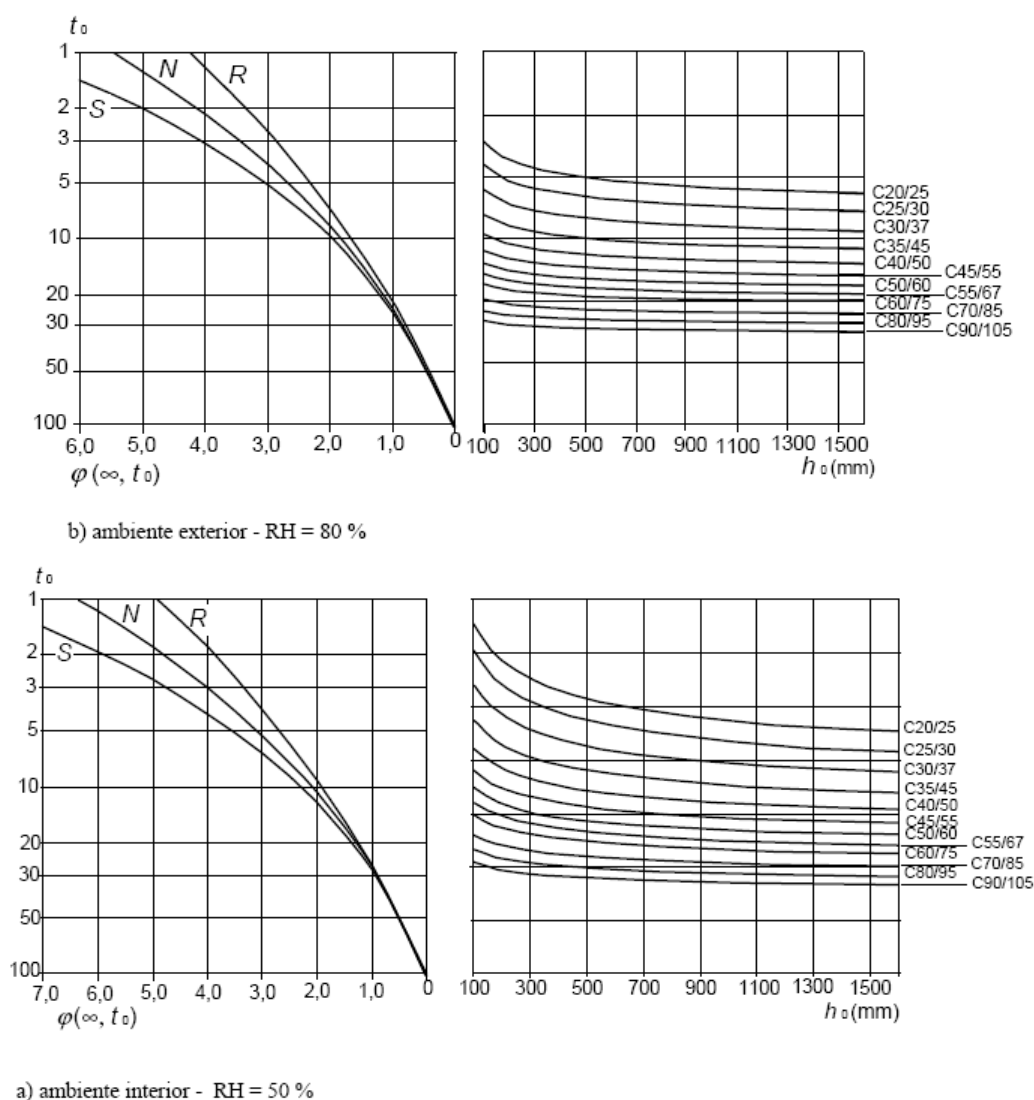


Figura 2-7 - Ábacos do EC2 para a determinação do coeficiente de fluência

### **3. MÉTODOS DE ANÁLISE DOS EFEITOS DE 2ª ORDEM EM PEÇAS COMPRIMIDAS DE BETÃO ARMADO**

#### **3.1. MÉTODOS PROPOSTOS NO EC2**

O EC2, para além do método geral de análise, considerando explicitamente os efeitos física e geometricamente não lineares, propõe dois métodos simplificados, designados por método da rigidez nominal e por método da curvatura nominal.

##### **3.1.1. Método geral**

O método geral é baseado numa análise global não linear de segunda ordem (análise física e geometricamente não linear), de acordo com as regras gerais especificadas no EC2 para este tipo de análises. Devem ser usadas as relações constitutivas adequadas para a análise global e que os efeitos da fluência devem ser tidos em consideração. Especificamente, é referido que podem ser utilizadas as relações constitutivas para o betão e o aço propostas nessa norma, baseadas em valores de cálculo. Na ausência de modelos mais refinados, os efeitos da fluência podem ser considerados afectando os valores dos diagramas atrás referidos pelo factor  $(1 + \varphi_{ef})$ . Segundo esta metodologia, da análise resulta directamente o valor de cálculo da carga de rotura. O EC2 não fornece pormenores em relação à metodologia de análise não linear, que recorre, geralmente, a um processo iterativo de cálculo.

##### **3.1.2. Método da rigidez nominal**

No método da rigidez nominal os efeitos de segunda ordem são estimados recorrendo a um conceito de rigidez reduzida, com a finalidade de simular a influência da não linearidade física no comportamento do betão armado. Pretende-se assim, de forma simplificada,

considerar os efeitos da fendilhação, plastificação e fluência característicos do comportamento do betão armado.

A aplicação deste método à análise dos efeitos de 2ª ordem teve origem no regulamento americano ACI, tendo sido considerado posteriormente no EC2.

É de referir que, segundo o ACI, a rigidez utilizada na análise de estruturas deverá reflectir os valores existentes nos elementos no momento que antecede a rotura. Assim, na sua aplicação na análise dos efeitos de 2ª ordem é relevante a obtenção de uma estimativa realista da rigidez e, consequentemente, da deformação da estrutura nessa situação.

Segundo o EC2, ponto 5.8.7.1, numa análise de segunda ordem baseada na rigidez deve ser tida em conta a rigidez de flexão considerando a fendilhação, a fluência e a não linearidade do comportamento dos materiais. O mesmo deve ser tido em conta para os elementos estruturais adjacentes, bem como para a interacção solo-estrutura, sempre que for relevante.

Para tal, o EC2 propõe uma expressão simplificada, com vista à obtenção da rigidez nominal a partir da homogeneização da secção, baseada na contribuição ponderada da rigidez do betão e do aço,

$$EI = K_c \cdot E_{cd} \cdot I_c + K_s \cdot E_s \cdot I_s \quad (3-1)$$

sendo,

$E_{cd}$  o valor de dimensionamento do módulo de elasticidade do betão;

$I_c$  o momento de inércia da secção de betão;

$E_s$  o valor de dimensionamento do módulo de elasticidade das armaduras;

$I_s$  o segundo momento da área das armaduras em relação ao centro da área de betão;

$K_c$  um factor para os efeitos da fendilhação, fluência, etc.

$K_s$  um factor que entra em conta com a contribuição das armaduras;

Podem ser considerados os factores apresentados em seguida, desde que a percentagem de armadura da secção seja superior a 0,2% ( $\rho \geq 0,002$ ),

$$K_s = 1$$

( 3-2)

$$K_c = \frac{k_1 k_2}{(1 + \varphi_{ef})}$$

( 3-3)

sendo,

- $\rho$  percentagem de armadura,  $A_s/A_c$ ;
- $A_s$  a área de secção total das armaduras;
- $A_c$  a área da secção de betão;
- $\varphi_{ef}$  coeficiente de fluência efectivo;
- $k_1$  um factor que depende da classe de resistência do betão;
- $k_2$  um factor que depende do esforço axial e da esbelteza.

$$k_1 = \frac{f_{ck}}{20} \text{ (MPa)}$$

( 3-4)

$$k_2 = n \cdot \frac{\lambda}{170} \leq 0,20$$

( 3-5)

onde,

- $n$  é a força axial relativa,  $N_{Sd} / (A_c \cdot f_{cd})$ ;
- $\lambda$  é o coeficiente de esbelteza.

Se o coeficiente de esbelteza  $\lambda$  não for conhecido, então  $k_2$  pode ser tomado como,

$$k_2 = n \cdot 0,30 \leq 0,20$$

( 3-6)

Para valores de  $p \geq 0,01\%$  podem ser tomados os seguintes valores,

$$K_s = 0$$

( 3-7)

$$K_c = \frac{0,3}{(1 + 0,5\varphi_{ef})}$$

( 3-8)

Em estruturas estaticamente indeterminadas deverá ser considerado o efeito desfavorável da fendilhação dos elementos adjacentes. Para estes casos, as expressões ( 3-1) a ( 3-8) não são geralmente aplicáveis, podendo, no entanto, admitir-se fendilhações parciais. Nestes casos a rigidez pode ser estimada a partir do módulo de elasticidade efectivo do betão,

$$E_{cd,eff} = E_{cd} / (1 + \varphi_{ef})$$

( 3-9)

onde,

$E_{cd}$  é o valor de dimensionamento do módulo de elasticidade do betão;

$\varphi_{ef}$  é o coeficiente efectivo de fluência, podendo utilizar-se o mesmo valor das colunas.

O momento de dimensionamento, incluindo os efeitos de segunda ordem, pode ser expresso através de um factor de amplificação do momento de primeira ordem resultante de uma análise linear.

Considerando uma coluna simples isolada, rotulada nas extremidades, com um comprimento  $l = l_0$ , o momento de segunda ordem pode ser expresso por,

$$M_2 = N \cdot y = N \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{c} = N \cdot \frac{M}{EI} \cdot \frac{l_0^2}{c} = N \cdot \frac{l_0^2}{EI} \cdot \left( \frac{M_0}{c_0} + \frac{M_2}{c_2} \right) \quad (3-10)$$

Considerando os coeficientes  $c_0$  e  $c_2$  é possível obter distribuições diferentes para os momentos de primeira e segunda ordem, bem como para as curvaturas correspondentes. Resolvendo a equação em ordem a  $M_2$ , tem-se,

$$M_2 = M_0 \cdot \frac{N \cdot \frac{l_0^2}{c_0 EI}}{1 - N \cdot \frac{l_0^2}{c_2 EI}} = M_0 \cdot \frac{c_2 / c_0}{\frac{c_2 EI}{l_0^2 N} - 1} \quad (3-11)$$

Em muitos casos é razoável assumir que o momento de segunda ordem apresenta um diagrama com forma sinusoidal, correspondendo a  $c_2 = \pi^2$ . Então  $M_2$  pode ser dado por,

$$M_2 = M_0 \cdot \frac{\pi^2 / c_0}{\frac{\pi^2 EI}{l_0^2 N} - 1} = M_0 \cdot \frac{\beta}{N_B / N - 1} \quad (3-12)$$

onde,

$N_B$  é a carga nominal de encurvadura (baseada na rigidez nominal)

$\beta$  é um parâmetro que tem em conta a distribuição dos momentos de 1ª ordem.

O momento total será dado por,

$$M_{Sd} = M_{0Sd} \left[ 1 + \frac{\beta}{\left( \frac{N_B}{N_{Sd}} \right) - 1} \right] \quad (3-13)$$

com,

$$N_B = \frac{\pi^2 E I}{l_0^2} \quad (3-14)$$

onde,

$M_{0Sd}$  é o momento de primeira ordem;

$N_{Sd}$  é o valor de dimensionamento da carga axial.

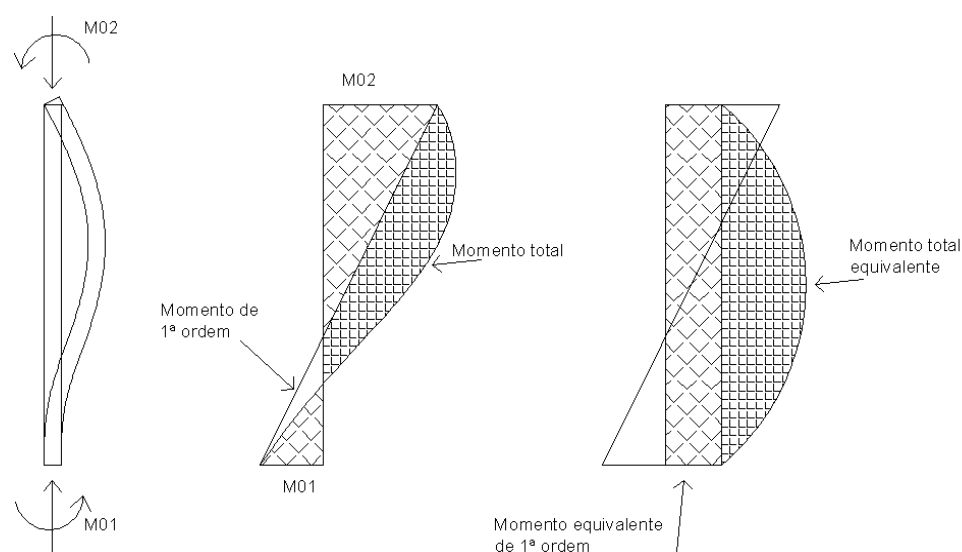
Para membros isolados com uma secção de corte constante, pode-se assumir que o momento de segunda ordem tem uma distribuição sinusoidal. Então,

$$\beta = \frac{\pi^2}{c_0} \quad (3-15)$$

onde,

$c_0$  é o coeficiente que depende da distribuição do momento de 1ª ordem ( $c_0=8$  para uma momento de 1ª ordem constante,  $c_0=9,6$  para uma distribuição em parábola e  $c_0=12$  para um distribuição triangular simétrica).

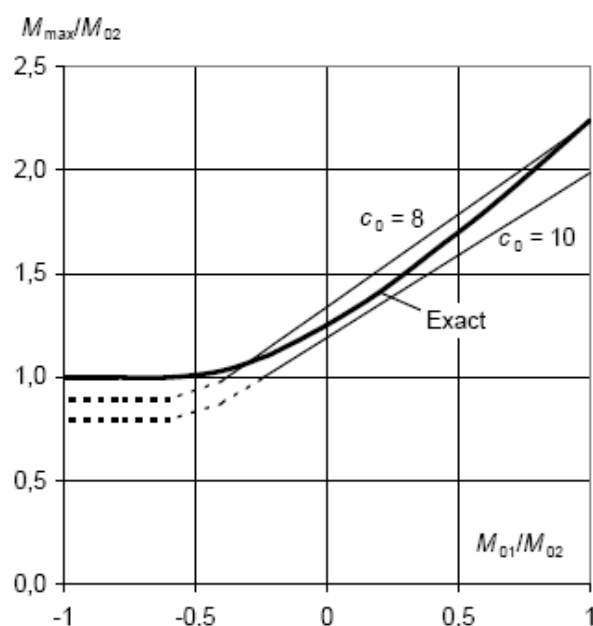




**Figura 3-1 - Momento equivalente em caso de momentos de extremidade diferentes.**

Para peças sem carga transversal, os momentos  $M_{01}$  e  $M_{02}$  podem ser substituídos por um momento constante equivalente  $M_{0Sd}$ , dado pela expressão ( 3-18), devendo, neste caso, ser adoptado  $c_0=8$ .

Na Figura 3-2 é considerada uma peça com momentos de extremidade diferentes, em acordo com a Figura 3-1, com  $e_{02} / h = M_{02} / Nh = 0,1$  e  $N_B / N = 2$ , adoptando para  $c_0$  os valores 8 e 10.



**Figura 3-2 - Comparação entre as soluções exacta e a de momento equivalente.**

No caso de não ser possível satisfazer as condições anteriores, então é razoável assumir  $\beta=1$ , o que reduz a expressão ( 3-13) para,

$$M_{Sd} = \frac{M_{0Sd}}{1 - \left( \frac{N_{Sd}}{N_B} \right)}$$

**( 3-16)**

### **3.1.3. Método da curvatura nominal**

O método da curvatura nominal destina-se, essencialmente, ao dimensionamento de elementos isolados com esforço axial constante e comprimento de encurvadura ( $l_0$ ) definido, fornecendo um momento nominal de segunda ordem baseado na configuração deformada, obtido tendo em consideração o comprimento de encurvadura e uma curvatura máxima estimada.

### 3.1.3.1. Momentos flectores

O momento flector de dimensionamento é dado pela expressão,

$$M_{sd} = M_{0sd} + M_2 \quad (3-17)$$

onde,

$M_{0sd}$  é o momento de 1ª ordem, incluindo o efeito das imperfeições geométricas;

$M_2$  é o momento nominal de segunda ordem.

O valor máximo de  $M_{sd}$  é dado pela distribuição de  $M_{0sd}$  e  $M_2$ , sendo que o valor deste último pode ser considerado como uma distribuição em parábola ao longo do comprimento de encurvadura efectivo.

Para colunas sem carregamentos transversais, em que se verifiquem diferentes momentos de primeira ordem  $M_{01}$  e  $M_{02}$  nas extremidades, deverá ser utilizado o momento equivalente  $M_{0e}$ , calculado de acordo com a expressão seguinte,

$$M_{0e} = 0,6 \cdot M_{02} + 0,4 \cdot M_{01} \geq 0,4 \cdot M_{02} \quad (3-18)$$

sendo que  $M_{01}$  e  $M_{02}$  devem ter o mesmo sinal se provocarem tensões de mesmo sinal na mesma face do elemento, caso contrário devem ter sinais opostos. Deve verificar-se ainda a condição  $|M_{02}| \geq |M_{01}|$ .

O momento nominal de segunda ordem pode ser obtido pela seguinte expressão,

$$M_2 = N_{sd} \cdot e_2 \quad (3-19)$$

onde,

$N_{sd}$  é o valor da carga axial de dimensionamento;

$e_2$  é excentricidade de segunda ordem, que pode ser dada por,

$$e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{c}$$

( 3-20)

$\frac{1}{r}$  é a curvatura;

$l_0$  é o comprimento efectivo de encurvadura;

$c$  é um factor que depende da distribuição da curvatura total; normalmente é utilizado  $c = 10$  ( $\approx \pi^2$ ) quando as secções são constantes; no caso do momento de primeira ordem ser constante, então o valor de  $c$  pode ser reduzido até um mínimo de 8.

### 3.1.3.2. Cálculo da curvatura

Para secções transversais simétricas (incluindo armaduras) poderá utilizar-se a seguinte expressão para o cálculo da curvatura,

$$\frac{1}{r} = K_r \cdot K_\phi \cdot \frac{1}{r_0}$$

( 3-21)

onde,

$K_r$  é o factor de correcção que depende da carga axial, dado por,

$$K_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} \leq 1;$$

( 3-22)

$n$  é o esforço relativo axial  $n = \frac{N_{sd}}{(A_c \cdot f_{cd})};$

( 3-23)

$n_u$  é o valor máximo do esforço axial reduzido  $n_u = 1 + \omega$ ;

$$\omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$$

( 3-24)

$A_s$  é a área total de armaduras da secção;

$A_c$  é a área de corte da secção;

$n_{bal}$  é o valor de  $n$  quando o momento resistente é máximo, podendo adoptar-se o valor de 0,4;

$K_\varphi$  é um factor que tem em conta a fluência;

$$K_\varphi = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} \geq 1$$

( 3-25)

$\varphi_{ef}$  é o coeficiente de fluência efectivo;

$$\beta = 0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}$$

( 3-26)

sendo,

$\lambda$  esbelteza

$\frac{1}{r_0}$  curvatura base;

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45 \cdot d}$$

( 3-27)

$\varepsilon_{yd}$  valor de dimensionamento da extensão de cedência do aço.

$$d = \left(\frac{h}{2}\right) + i_s$$

( 3-28)

### 3.1.4. Verificação da segurança de elementos sujeitos a flexão composta desviada

Sempre que se verifique a existência de flexão composta desviada, podem usar-se os métodos simplificados efectuando a análise separada nas duas direcções, devendo haver um cuidado especial na selecção da secção crítica da peça, onde a combinação de esforços é condicionante.

As imperfeições geométricas podem ser consideradas apenas na direcção mais desfavorável.

A verificação biaxial pode ser dispensada caso se verifique as seguintes condições:

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_z} \leq 2 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_z}{\lambda_y} \leq 2$$

( 3-29)

$$\frac{e_y / h_{eq}}{e_z / b_{eq}} \leq 0,2 \quad \text{ou} \quad \frac{e_z / b_{eq}}{e_y / h_{eq}} \leq 0,2$$

( 3-30)

onde,

$b, h$  são, respectivamente, a largura e altura da secção;

$b_{eq} = i_y \cdot \sqrt{12}$  e  $h_{eq} = i_z \cdot \sqrt{12}$  para uma secção rectangular equivalente;

$\lambda_y, \lambda_z$  são, respectivamente, os coeficientes de esbelteza nos planos y e z;

$i_y, i_z$  são os raios de giração correspondentes aos planos y e z, respectivamente;

$e_z = M_{Sdy} / N_{Sd}$  é a excentricidade no plano z;

$e_y = M_{Sdz} / N_{Sd}$  é a excentricidade no plano y;

$M_{Sdy}$  é o momento de dimensionamento no plano y;

$M_{Sdz}$  é o momento de dimensionamento no plano z;

$N_{Sd}$  é o valor de carga axial de dimensionamento.

Caso não se verifiquem as condições anteriores, é necessário ter em consideração a flexão composta biaxial, incluindo os efeitos de 2ª ordem em cada direcção.

Simplificadamente, para a consideração da flexão biaxial pode utilizar-se o seguinte critério,

$$\left( \frac{M_{Sdz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left( \frac{M_{Sdy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1$$

( 3-31)

onde,

$M_{Sdz / y}$  é o momento de dimensionamento em torno do respectivo plano, incluindo os efeitos de segunda ordem;

$M_{Rdz / y}$  é o momento resistente na direcção respectiva;

$a$  é o expoente, que deve tomar os valores indicados no Quadro 3-1;

**Quadro 3-1 Valores a adoptar para  $a$**

Secções	$N_{Sd} / N_{Rd}$	0,1	0,7	1,0
Rectangulares	$a$	1,0	1,5	2,0
Circulares e elípticas		2,0		

$N_{Sd}$  é o valor de dimensionamento do esforço axial;

$N_{Rd} = A_c f_{cd} + A_s f_{yd}$  é o valor de dimensionamento do esforço resistente de tracção da secção, onde,

$A_c$  é a área de corte da secção;

$A_s$  é a área de corte das armaduras longitudinais.

Para valores intermédios dos tabelados deverá ser feita uma interpolação.

### 3.1.5. Imperfeições geométricas

Em elementos sujeitos a cargas axiais de compressão, os efeitos desfavoráveis de possíveis imperfeições e desvios geométricos da estrutura e de posicionamento de carregamentos, devem ser contemplados na verificação da segurança. No entanto, os desvios de dimensões das secções são normalmente tidos em conta nos factores de segurança dos materiais, pelo que estes não devem ser considerados na verificação dos efeitos de 2ª ordem.

As imperfeições devem ser consideradas para a verificação dos estados limites últimos, nas combinações quase permanentes e nas acções acidentais.

As imperfeições podem ser representadas pela inclinação  $\theta_i$ , dada por,

$$\theta_i = \theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$$

( 3-32)

onde,

$\theta_0$  é o valor básico, que deve constar dos anexos nacionais, sendo o valor recomendado de 1/200;

$\alpha_h$  é um factor de redução do comprimento ou altura,  $\alpha_h = 2/\sqrt{l}$ ;  $2/3 \leq \alpha_h \leq 1$ ;

$\alpha_m$  é o factor de redução do número de elementos,  $\alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot (1 + 1/m)}$ ;

$l$  é o comprimento ou altura (m);

$m$  é o número de elementos verticais contribuindo para o efeito total.



Efeito num membro isolado:  $l$  = comprimento do membro;  $m = 1$ ;

Efeito num sistema de contraventamento:  $l$  = altura do edifício,  $m$  = número de elementos verticais que contribuam para a força horizontal provocada pelo sistema de contraventamento;

Efeito no diafragma de um piso que distribui as cargas horizontais:  $l$  = altura do piso,  $m$  = número de elementos verticais nos pisos contribuindo para força horizontal total.

Para elementos isolados, o efeito das imperfeições pode ser tido em consideração de duas formas:

i) Como uma excentricidade  $e_i$ , dada por,

$$e_i = \theta_i \cdot l_0 / 2$$

( 3-33)

onde  $l_0$  é o comprimento de encurvadura.

Para paredes e colunas isoladas em sistemas de contraventamento  $e_i = l_0 / 400$ , o que corresponde a  $\alpha_h = 1$ .

ii) Como uma força transversal  $H_i$ , aplicada na posição em que cause o maior momento flector, dada por,

- para membros não contraventados:  $H_i = \theta_i \cdot N$

( 3-34)

- para membros contraventados  $H_i = 2\theta_i \cdot N$

( 3-35)

onde  $N$  é o esforço axial.

### 3.2. VERIFICAÇÃO DE SEGURANÇA DE PILARES ISOLADOS PELO REBAP

A utilização da actual regulamentação portuguesa de estruturas de betão armado e pré-esforçado [REBAP, 1983] tem vindo a ser substituída, com vantagem, pelo EC2. No entanto, apresentam-se resumidamente os critérios de verificação da segurança em relação ao estado limite último de encurvadura que constam do REBAP, que se baseiam, como se verá, no método da curvatura.

Segundo o REBAP, a verificação da segurança pode ser dispensada nos casos em que se verifique uma das seguintes condições:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{M_{Sd}}{N_{Sd}} \geq 3,5 \cdot h && \text{para } \lambda \leq 70 \\
 & \frac{M_{Sd}}{N_{Sd}} \geq 3,5 \cdot h \cdot \frac{\lambda}{70} && \text{para } \lambda > 70
 \end{aligned}
 \tag{3-36}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \lambda \leq 50 - 15 \cdot \frac{M_{Sd,b}}{M_{Sd,a}} && \text{em estruturas de nós fixos} \\
 & \lambda \leq 35 && \text{em estruturas de nós móveis}
 \end{aligned}
 \tag{3-37}$$

em que  $h$  é a altura da secção.

A determinação dos momentos de dimensionamento, segundo uma dada direcção, considerando os efeitos de segunda ordem, é efectuada adicionando ao momento de primeira ordem  $M_{Sd}$  a parcela correspondente às excentricidades adicionais do método simplificado do REBAP, dado por,

$$M_{Sd,adi} = N_{Sd} (e_a + e_2 + e_c)
 \tag{3-38}$$

em que,

$N_{Sd}$  – valor de cálculo do esforço normal actuante;

$e_a$  – excentricidade accidental;

$e_2$  – excentricidade de segunda ordem;

$e_c$  – excentricidade de fluência.

A quantificação das diferentes excentricidades é apresentada de seguida.

- a) Excentricidade accidental  $e_a$  – pretende traduzir os efeitos das imperfeições geométricas ou da incerteza na posição de actuação das cargas na estrutura. Nos casos correntes  $e_a$  pode ser obtida pela expressão,

$$e_a = \frac{l_0}{300}$$

( 3-39)

não devendo ser considerado um valor inferior a 2,0 cm.

- b) Excentricidade de segunda ordem  $e_2$  – corresponde à flecha do pilar, relativa à secção crítica, que torna máxima, nesta secção, a diferença ( $M'_{Rd} - N_{Sd} e_2$ ), em que a primeira parcela representa um momento resistente que, sob acção de  $N_{Sd}$ , é compatível com  $e_2$ . O valor de  $e_2$  pode ser calculado a partir da expressão,

$$e_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{10} = \frac{5 \times 10^{-3}}{h} \cdot \eta \cdot \frac{l_0^2}{10}$$

( 3-40)

em que,

$r$  – é o raio de curvatura;

$h$  – é a altura da secção, segundo o plano de deformação;

$\eta$  – é um coeficiente que pretende traduzir a diminuição de curvatura da secção com o aumento do esforço axial, sendo dado pela expressão,

$$\eta = \frac{0,4}{\nu_{Sd}} = \frac{0,4 \cdot f_{cd} \cdot A_c}{N_{Sd}} \leq 1,0$$

( 3-41)

- c) Excentricidade de fluência  $e_c$  – pretende ter em conta o acréscimo de deformação devido aos efeitos da fluência, apresentando o REBAP uma expressão que permite a sua avaliação. A consideração da excentricidade de fluência poderá ser dispensada se,

$$\frac{M_{Sd}}{N_{Sd}} \geq 2,0 \cdot h \quad \text{ou} \quad \lambda \leq 70$$

( 3-42)

Nas estruturas de nós móveis, como é o caso geral das pontes e viadutos, as secções críticas localizam-se nas extremidades das peças.

Nas estruturas de nós fixos a secção crítica normalmente não ocorre na proximidade das extremidades dos pilares, mas numa zona intermédia. Assim, o valor de momento de dimensionamento  $M_{Sd}$  é dado pelo menor dos seguintes valores,

$$M_{Sd} = 0,6 \cdot M_{Sd,a} + 0,4 \cdot M_{Sd,b}$$

( 3-43)

$$M_{Sd} = 0,4 \cdot M_{Sd,a}$$

( 3-44)

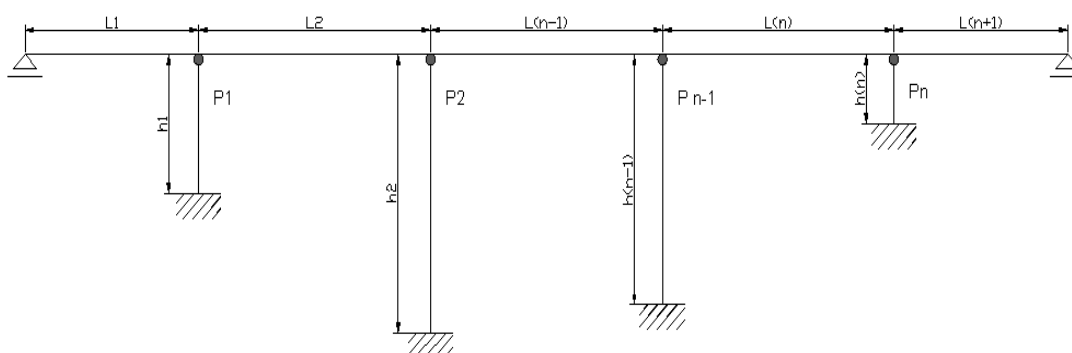
em que  $M_{Sd,a}$  e  $M_{Sd,b}$  são os valores dos momentos actuantes nas extremidades dos pilares, assumindo que  $|M_{Sd,a}| \geq |M_{Sd,b}|$  e atribuindo-lhes o mesmo sinal ou sinais contrários consoante determinam uma deformada do pilar com simples ou com dupla curvatura, respectivamente.

### 3.3. ADAPTAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLISE PARA PILARES DE PONTES

#### 3.3.1. Considerações gerais

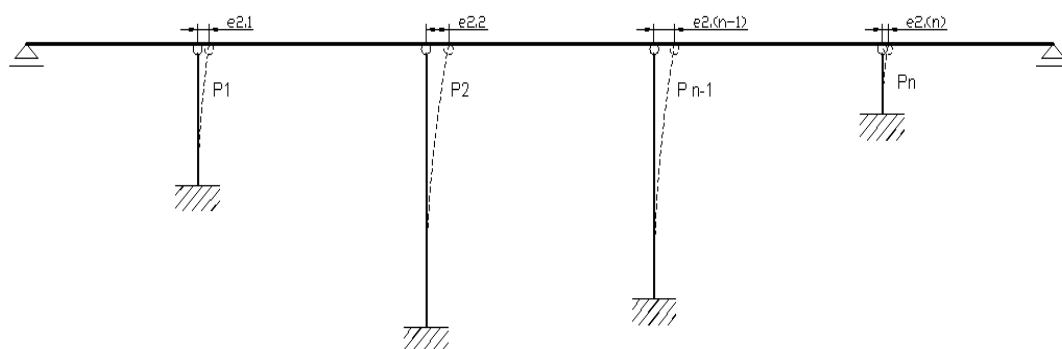
Segundo as metodologias de cálculo do EC2, apresentadas nos pontos anteriores, é possível efectuar uma análise simplificada da encurvadura de cada pilar isolado, obtendo-se um factor de amplificação de momentos de primeira ordem ou uma excentricidade adicional de segunda ordem, consoante o método escolhido.

Considerando uma estrutura com  $n$  pilares, com secções transversais iguais mas com alturas diferentes, com uma ligação rotulada no topo e um tabuleiro rígido no seu plano, com  $n+1$  vãos, e simplesmente apoiado nos encontros (Figura 3-3), é possível calcular os efeitos de segunda ordem para cada pilar isoladamente pelos métodos simplificados propostos no EC2, obtendo-se excentricidades diferentes em cada um deles. No entanto, isso não se afigura fisicamente possível, uma vez que os nós superiores dos pilares terão deslocamentos idênticos, devido à ligação conferida pelo tabuleiro.



**Figura 3-3 - Modelo tipo de estrutura com tabuleiro de nós móveis**

Nas condições referidas torna-se necessário compatibilizar os deslocamentos correspondentes às excentricidades  $e_{2n}$  dos pilares considerados isolados (Figura 3-34).



**Figura 3-4 - Excentricidades de segunda ordem em cada pilar**

### 3.3.2. Técnica de análise global simples

Os efeitos globais de 2ª ordem podem ser ponderados considerando uma média simples das excentricidades de todos os pilares,  $e_{2m}$ ,

$$e_{2m} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} e_{2i}}{n}$$

( 3-45)

onde,

$e_{2i}$  é a excentricidade de segunda ordem relativa a cada pilar;

$n$  é o numero de pilares.

Este método, proposto na BS 8110, tem a vantagem de ser simples, prático e de permitir a obtenção de resultados consideravelmente melhores que a utilização directa das excentricidades resultantes da análise isolada de cada pilar.

### 3.3.3. Técnica de análise global ponderada

Como referido, os tabuleiros contínuos comportam-se como elementos rígidos no seu próprio plano, para acções horizontais. Como referido, em estruturas de nós móveis as excentricidades de 2ª ordem a considerar no coroamento dos pilares devem ser idênticas para todos eles. Considerando a analogia de que essa excentricidade média ponderada seria provocada por uma força horizontal fictícia  $F_t$ , tem-se, em regime elástico linear,

$$F_t = K_t \cdot e_{2mk} = e_{2mk} \cdot \sum_{i=1}^n K_i \quad (3-46)$$

sendo  $K_t$  a rigidez total horizontal e  $K_i$  a rigidez horizontal do pilar  $i$ .

Fazendo o mesmo tipo de analogia para cada um dos pilares considerados isoladamente, obtêm-se,

$$F_i = K_i \cdot e_i \quad (3-47)$$

$$F_t = \sum_i F_i = \sum_i K_i \cdot e_i \quad (3-48)$$

Assim, uma estimativa da excentricidade ponderada de 2ª ordem a considerar em todos os pilares é dada por,

$$e_{2mk} = \frac{\sum_{i=1}^n e_{2i} \cdot k_i}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (3-49)$$

onde,

$e_{2i}$  é a excentricidade de segunda ordem relativa a cada pilar;

$K_i$  é a rigidez horizontal do topo do pilar;

$n$  é o número de pilares.

A rigidez horizontal elástica dos pilares pode ser obtida considerando um deslocamento unitário no topo,

$$K_i = \frac{12 \cdot E_i \cdot I_i}{h_i^3} \quad \text{para pilares bi-encastados} \quad (3-50)$$

$$K_i = \frac{3 \cdot E_i \cdot I_i}{h_i^3} \quad \text{para pilares encastados na base e rotulados no topo} \quad (3-51)$$

onde:

$E_i$  é o módulo de elasticidade do pilar  $i$ ;

$I_i$  é o momento de inércia do pilar  $i$ ;

$h_i$  é a altura do pilar  $i$ .

Como se verá adiante, a utilização desta técnica permite a obtenção de melhores resultados, visto que tem em conta o comportamento global de toda a estrutura.



## 4. CÁLCULO DOS ESFORÇOS RESISTENTES DE SECÇÕES DE BETÃO ARMADO EM FLEXÃO COMPOSTA

### 4.1. INTRODUÇÃO

Devido à complexidade das secções utilizadas nos pilares de pontes, a determinação dos esforços resistentes em flexão composta tem de ser formulada em termos de extensões máximas no betão e nas armaduras, dando-se a rotura da secção quando uma delas, ou ambas, atingem a extensão máxima.

### 4.2. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS DOS MATERIAIS

Os valores preconizados para as extensões máximas  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu2}$  para o betão são apresentados na Tabela 3.1 do EC2, dependendo da classe de resistência, mas sendo, para as classes usuais, de 2‰ e 3,5‰, respectivamente.

Para o cálculo das secções foi usada uma relação tensão-deformação baseada no diagrama de interacção parábola-rectângulo proposto no EC2, conforme a Figura 4-1, sendo obtida a partir das seguintes expressões,

$$\sigma_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{com } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \quad (4-1)$$

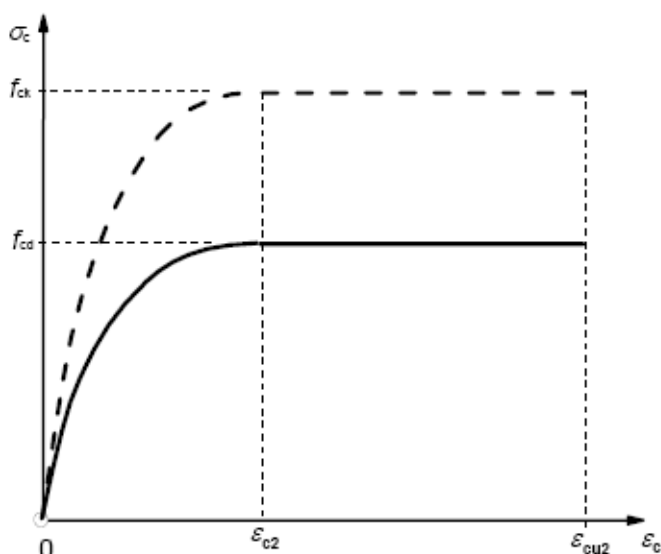
$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{com } \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu2} \quad (4-2)$$

onde,

$\epsilon_{c2}$  é o valor nominal da extensão para a tensão máxima de compressão (‰);

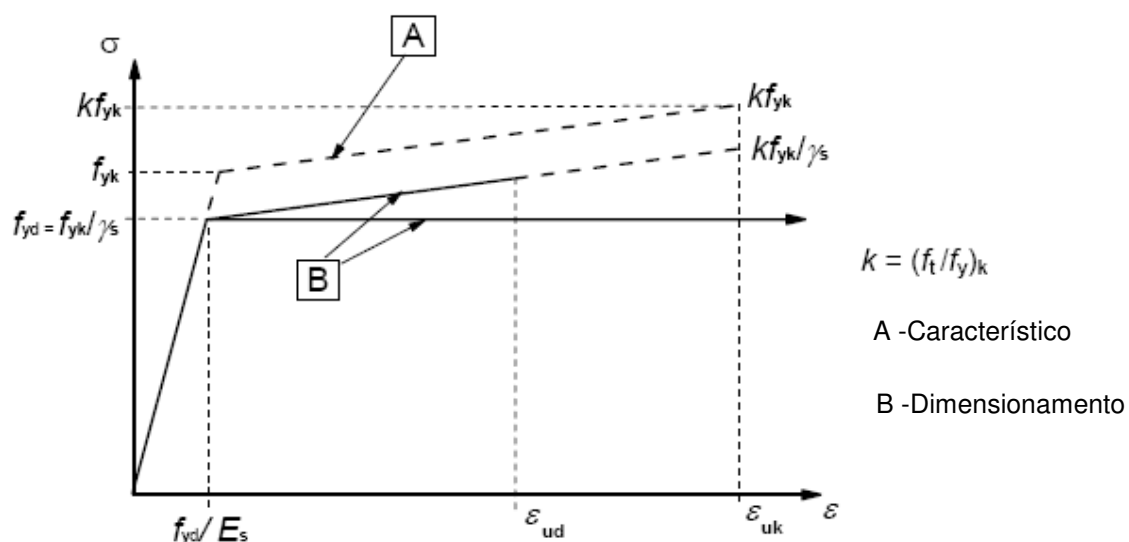
$\epsilon_{cu2}$  é o a extensão última para o betão (‰);

$n$  é o valor de expoente, de acordo com a tabela 3.1 do EC2.



**Figura 4-1 – Diagrama tensão-deformação (parábola-rectângulo) para betão sujeito a compressão.**

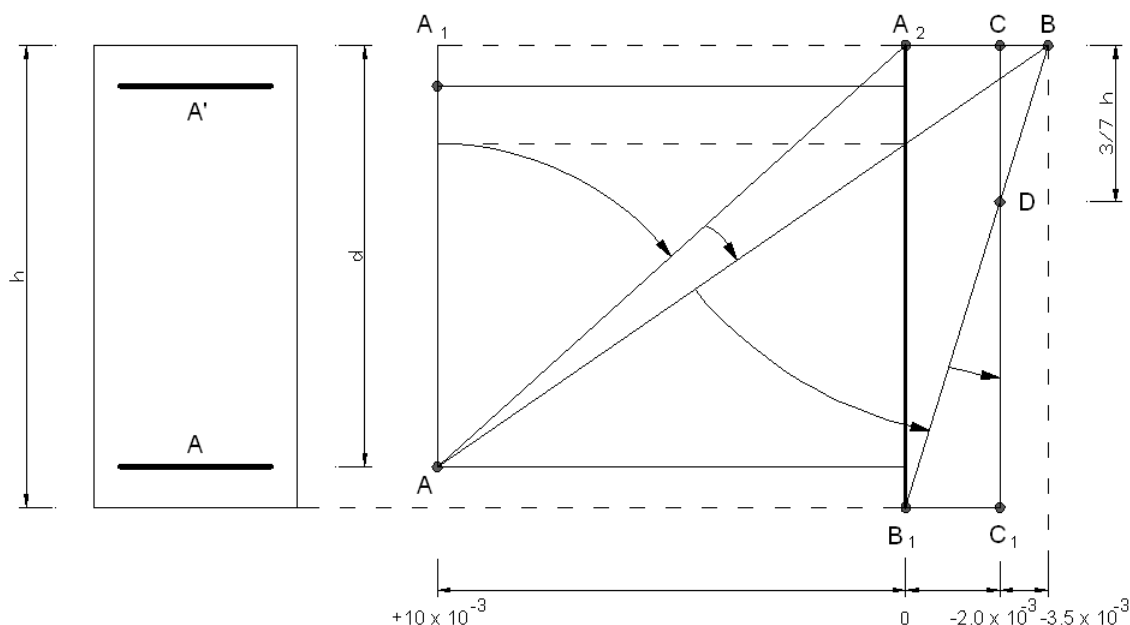
Para o aço adoptou-se o diagrama tensão-deformação proposto no EC2, considerando-se o valor de 10 ‰ para  $\epsilon_{uk}$  e 200 GPa para o módulo de elasticidade.



**Figura 4-2 – Diagrama tensão-deformação para o aço em tracção e compressão.**

### 4.3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A determinação da capacidade resistente de uma secção de betão armado é efectuada mediante a consideração de hipóteses de deformação limite no betão e nas armaduras. Quando se atinge uma ou mais das extensões máximas haverá lugar a rotura. Na Figura 4.3 são apresentados as extensões máximas que se podem verificar numa secção rectangular de betão armado, considerando aderência perfeita entre o betão e as armaduras, resistência nula do betão à tracção e a manutenção da hipótese de Bernoulli até à rotura. Na figura podem ser observadas várias situações (estados) limites.



**Figura 4-3 - Extensões limites no betão e nas armaduras**

A rotura da secção sujeita a um esforço normal e a um momento flector acontece quando uma das seguintes situações se verifica:

- |                |  |
|----------------|--|
| Zona $A_1 A_2$ | - A secção está totalmente traccionada - É ultrapassada a extensão limite para a tracção ( $10 \times 10^{-3}$ ) em toda a secção, posicionando-se a linha neutra fora da secção. Este estado limite deve-se a tracção simples ou flexão composta. |
| Zona $A_2 A B$ | - É ultrapassada a extensão limite para a tracção ( $10 \times 10^{-3}$ ) numa camada de armadura, com a linha neutra entre o bordo superior e uma   |

altura  $X=0,259.d$ , com extensões de encurtamento no betão inferiores a  $(-3,5 \times 10^{-3})$ . Este estado limite deve-se a flexão simples ou composta.

Zona A BB<sub>1</sub> - É ultrapassada a extensão limite de compressão no betão  $(-3,5 \times 10^{-3})$  no extremo da secção, com extensões na armadura inferior de  $+10 \times 10^{-3}$  e a linha neutra a situar-se entre a  $X=0,259d$  e o limite inferior da secção. Este estado limite deve-se a flexão composta com compressão.

Zona BB<sub>1</sub>-CC<sub>1</sub> - A secção está totalmente comprimida. É ultrapassada a extensão limite de compressão em toda a secção em simultâneo, (compreendida entre  $-3,5 \times 10^{-3}$  e  $-2,0 \times 10^{-3}$ ), com a linha neutra fora da secção. Este estado limite deve-se a compressão simples ou flexão composta.

Conhecendo as situações de rotura, é possível calcular, para um dado esforço axial, o respectivo momento resistente, através do seguinte algoritmo:

- Percorrer todas as posições possíveis da linha neutra (LN);
- Para cada posição da LN, admitindo a hipótese de Bernoulli, determinar as extensões de topo da secção e as extensões em cada camada de armadura;
- A partir das extensões obtidas, e admitindo que o betão não resiste à tracção, calcular as tensões no betão e nas armaduras;
- Calcular as forças resultantes para cada posição da (LN);
- Verificar a posição da LN para a qual as forças de rotura equilibram o esforço normal actuante;
- Calcular o momento resistente para as forças em equilíbrio.

Com base neste procedimento foi elaborado um programa de cálculo automático para a determinação da capacidade resistente de secções e dos diagramas de interacção  $N_{Rd}$ - $M_{Rd}$ , apresentando resultados numéricos e gráficos.

## 4.4. PROGRAMA DE CÁLCULO AUTOMÁTICO DESENVOLVIDO

O programa foi desenvolvido em Microsoft Excel, recorrendo ao Microsoft Visual Basic Application, para automatizar todo o processo, possibilitando assim uma base robusta de cálculo e uma apresentação gráfica apelativa. A utilização do programa está limitada a secções em que existe um eixo de simetria perpendicular ao vector momento. No entanto, esta condição verifica-se na generalidade dos pilares de pontes.

### 4.4.1. Funcionamento do programa de cálculo

É definida a geometria da secção, num sistema de eixos paralelos aos eixos principais de inércia a localização e a quantidade de armaduras e características dos materiais, de acordo com a nomenclatura estabelecida no EC2.

Características do betão:

- $f_{ck}$  -Valor característico da resistência à compressão do betão aos 28 dias (MPa), referido a cilindros de 30 cm de altura e 15 cm de diâmetro;
- $f_{cd}$  -Valor de cálculo da resistência à compressão (MPa), no caso de pontes o EC2 limita o valor desta tensão a  $0,85 f_{cd}$ ;
- $f_{ck,cube}$  -Valor característico da resistência à de compressão do betão aos 28 dias (MPa), referida a cubos de 15 cm de lado;
- $f_{cm}$  -Valor médio da resistência à compressão do betão (MPa), referida a cilindros;
- $f_{ctm}$  -Valor médio da resistência à tracção do betão (MPa);
- $E_{cm}$  -Valor médio do módulo de elasticidade do betão (GPa);
- $\epsilon_{c1}$  -Valor da extensão no betão no pico da tensão  $f_c$  (‰);
- $\epsilon_{cu1}$  -Valor nominal da extensão de rotura no betão para a análise não linear (‰);
- $\epsilon_{c2}$  -Valor nominal da extensão de cedência no betão (‰);
- $\epsilon_{cu2}$  -Valor nominal da extensão de rotura no betão para o diagrama de parábola rectângulo (‰);
- $n$  -Valor de expoente, de acordo com a tabela 3.1 do EC2.

Características do aço:

$F_{syd}$  -Valor de cálculo da tensão de cedência do aço (MPa);

$e_{syd}$  -Valor de cálculo da extensão de cedência do aço (MPa);

$E_{syd}$  -Módulo de elasticidade do aço (GPa);

Características da secção:

Este módulo necessita que lhe seja fornecida a largura das  $N_f$  fatias em que é dividida a secção, desde o topo até à base, considerando-se assim com uma discretização em altura de  $h/N_f$ . No caso das secções mais simples o programa calcula automaticamente a largura de cada uma das  $N_f$  fatias, mas nos casos de geometrias mais complexas o utilizador terá que fornecer esses elementos. Em complemento a este trabalho, prevê-se desenvolver, a curto prazo, um módulo que permita a determinação automática da largura das fatias para secções de qualquer geometria.

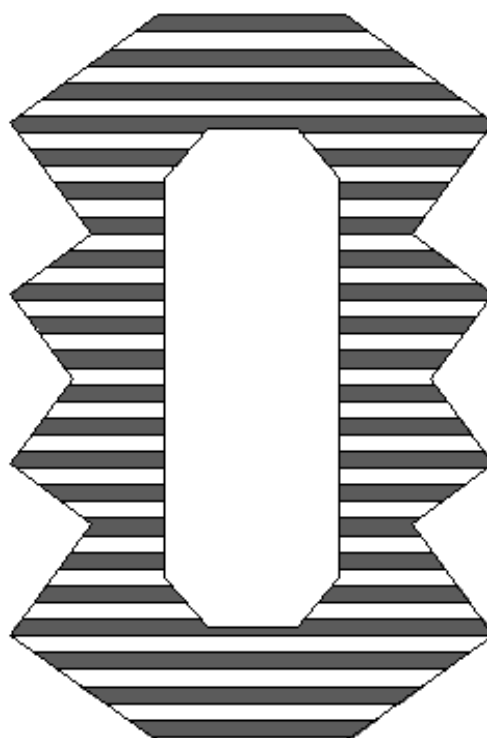
Os dados têm a seguinte organização:

Indicar se a secção é “rectangular”, “circular” ou “outra”;

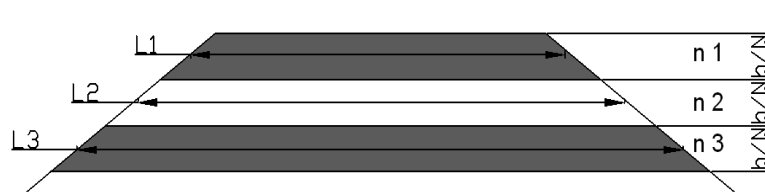
Se for “rectangular”, introduzir o valor para “b” (largura da secção) e “h” (altura da secção);

Se for “circular”, introduzir o valor para “r” (raio da secção);

Se for “outra”, então divide-se a secção em  $N_f$  fatias horizontais (ver Figura 4-4) de igual altura e introduzir, para cada uma delas, a sua “largura”, de cima para baixo (considerar a linha média de cada fatia, ver Figura 4-5).



**Figura 4-4 – Divisão da secção em fatias.**



$h$  – altura da secção  
 $N$  – número total de fatias  
 $n_i$  – número da fatia  
 $L_i$  – Largura da fatia

**Figura 4-5 – Largura média de cada fatia.**

- Localização das armaduras:

Este módulo necessita que o utilizador introduza a localização e a quantidade de armaduras passivas, e o numero total de camadas (SNt) considerando a quantidade de armaduras em cada alinhamento  $A_s(s_n)$  ( $\text{cm}^2$ ) e a sua cota em relação ao topo da secção  $h_{s(s_n)}$  (m) (ver Figura 4-6).

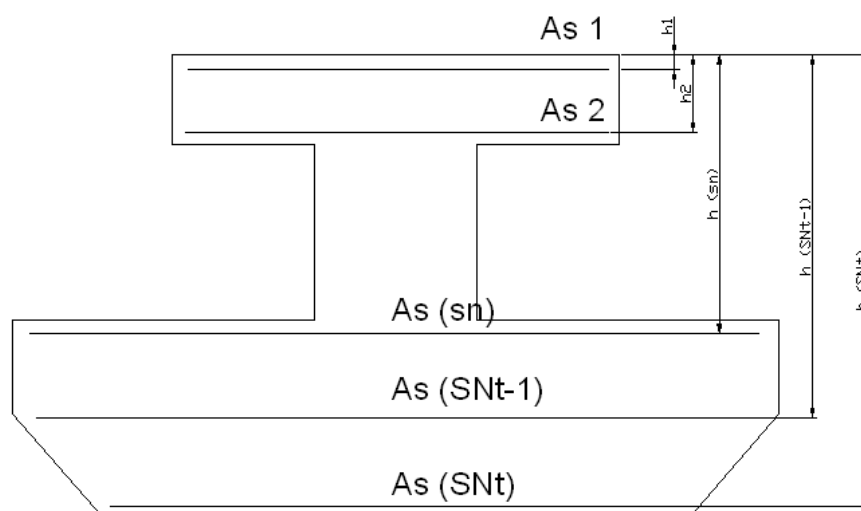


Figura 4-6 – Esquema de posicionamento das armaduras numa secção.

#### 4.4.2. Algoritmo de cálculo

Primeiro o programa efectua o cálculo das extensões em cada uma das  $N_f$  fatias, fazendo variar a posição da linha neutra em duzentas posições, sendo que as primeiras 50 estão fora do topo superior da secção, as 100 seguintes percorrem toda a altura da secção, e as ultimas 50 posições estão fora do topo inferior da secção.

Considerando que:

$n_{ln}$  é o número da posição da linha neutra [-50 a 150];

$\varepsilon_s$  é a extensão da armadura inferior da secção;

$\varepsilon_{s,sn}$  é a extensão da armadura da camada  $sn$  ;

$\sigma_{s(sn)}$  é a tensão da armadura da camada  $(sn)$  [MPa];

$A_{s(sn)}$  é a camada de armadura  $(sn)$ ;

$h_{s(sn)}$  é a altura da camada de armadura  $(sn)$  ao topo da secção [m];

$\varepsilon_c$  é a extensão no topo superior da secção [%];

$\varepsilon_{cFatia(i)}$  é a extensão do betão ao nível da fatia  $(i)$  [%];



$\sigma_{cFatia(i)}$  é a tensão no betão ao nível da fatia (i) [MPa];

$x$  é a altura da linha neutra em relação ao topo da secção[m];

$n_{fatia}$  é o número da fatia da secção em análise [1 a  $N_i$ ];

$h_{fatia}$  é a altura do centro da fatia ao topo da secção [m];

$L_{fatia}$  é a largura média da fatia [m];

$F_{cfatia,n}$  é a força exercida por cada  $n_{fatia}$  de betão [kN].

$F_{s(sn)}$  é a força exercida por cada camada de armadura (sn) [kN].

O programa utiliza o algoritmo que se apresenta de seguida, gerando-se os valores de  $x, \varepsilon_c$  e  $\varepsilon_s$  para cada posição da linha neutra, constituindo assim uma listagem de extensões, tensões e forças.

Para  $n_{ln}$  de -50 a 150:

$$\text{Se } n_{ln} < 0, \text{ então } \varepsilon_c = -\frac{10n_{ln}}{50} \quad (4-3)$$

$$\varepsilon_s = -10 \quad (4-4)$$

Se  $0 \leq n_{ln} \leq 100$

$$x = n_{ln} \cdot \frac{h}{100} \quad (4-5)$$

$$\text{Se } \left| \frac{10 \cdot 10^{-3} x}{d - x} \right| \leq 3,5 \text{ então } \varepsilon_c = \frac{10 \cdot 10^{-3} x}{d - x}, \quad (4-6)$$

$$\text{Caso contrário } \varepsilon_c = 3,5 \quad (4-7)$$

Se  $\varepsilon_c < 3,5$  então  $\varepsilon_s = -10$

( 4-8)

$$\text{Caso contrário } \varepsilon_s = \frac{-\varepsilon_c \cdot (d - x)}{x}$$

( 4-9)

Se  $n_{ln} > 100$ , então,

$$\varepsilon_c = 3,5 - \frac{1,5(n_{ln} - 100)}{50}$$

( 4-10)

$$\varepsilon_s = \frac{(2 - \varepsilon_{s(n=100)})}{50} \cdot (n_{ln} - 100) + \varepsilon_{s(n_{ln}=100)}$$

( 4-11)

Para  $n_{fatia}$  de 1 a  $N_f$ :

Se  $n_{fatia} > x$ , então  $\varepsilon_{Fatia(i)} = 0$

( 4-12)

Se  $\varepsilon_c \cdot \varepsilon_s > 0$ , então:

$$\text{Se } |\varepsilon_c| > |\varepsilon_s| \text{ então } \varepsilon_{cFatia} = \varepsilon_c - \frac{(|\varepsilon_c| - |\varepsilon_s|)}{N_f} \cdot n_{fatia}$$

( 4-13)

$$\text{Caso contrário } \varepsilon_{cFatia} = \varepsilon_c - \frac{(|\varepsilon_s| - |\varepsilon_c|)}{N_f} \cdot n_{fatia}$$

( 4-14)

Caso contrário,

$$\varepsilon_{cFatia} = \varepsilon_c - \frac{(|\varepsilon_c| + |\varepsilon_s|)}{N_f} \cdot n_{fatia}$$

( 4-15)

Se  $\varepsilon_{cFatia(i)} \geq \varepsilon_{c2}$  então  $\sigma_{cFatia} = 0,85 f_{cd}$

( 4-16)

Caso contrário,

$$\sigma_{cFatia} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_{Fatia}}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right)$$

( 4-17)

$$F_{cfatia,n} = \sigma_{cFatia} \cdot L_{fatia} \cdot 10 \cdot \frac{h}{N_f}$$

( 4-18)

Para a situação de equilíbrio as extensões nas armaduras, as resultantes das forças e o momento resistente são obtidos pelas expressões seguintes,

$$\varepsilon_{s(sn)} = \frac{h_{SNt} - h_{(sn)}}{h_{SNt}} \cdot \varepsilon_c + \frac{h_{(sn)}}{h_{SNt}} \cdot \varepsilon_s$$

( 4-19)

$$F_{s(sn)} = \varepsilon_{s(sn)} \cdot A_{s(sn)}$$

( 4-20)

$$N_{sd} = \sum_{n=1}^{n=N_f} F_{cfatia,n} + \sum_{sn=1}^{sn=SNt} F_{s(sn)}$$

( 4-21)

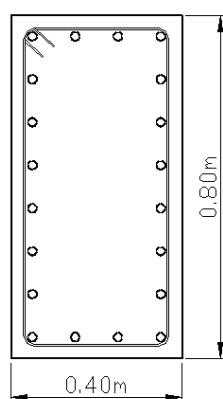
$$M_{rd} = N_{sd} \cdot \frac{h}{2} + \sum_{n=1}^{n=N_f} F_{cfatia,n} \cdot h_{fatia} + \sum_{sn=1}^{sn=SNt} F_{s(sn)} \cdot h_{s(sn)}$$

( 4-22)

### 4.4.3. Exemplos de aplicação

#### 4.4.3.1. Exemplo 1 – Secção rectangular

Calculou-se o momento resistente de uma secção rectangular com 0,80 m de altura e 0,40 m de largura, betão da classe C30/37, armada com 20 $\varnothing$ 20 num aço da classe A500 NR, distribuídos uniformemente pelas quatro faces, sujeita a um esforço axial de compressão de 100 kN.



**Figura 4-7 Secção rectangular de betão armado sujeita a um esforço de compressão**

**Quadro 4-1 Camadas de armaduras consideradas**

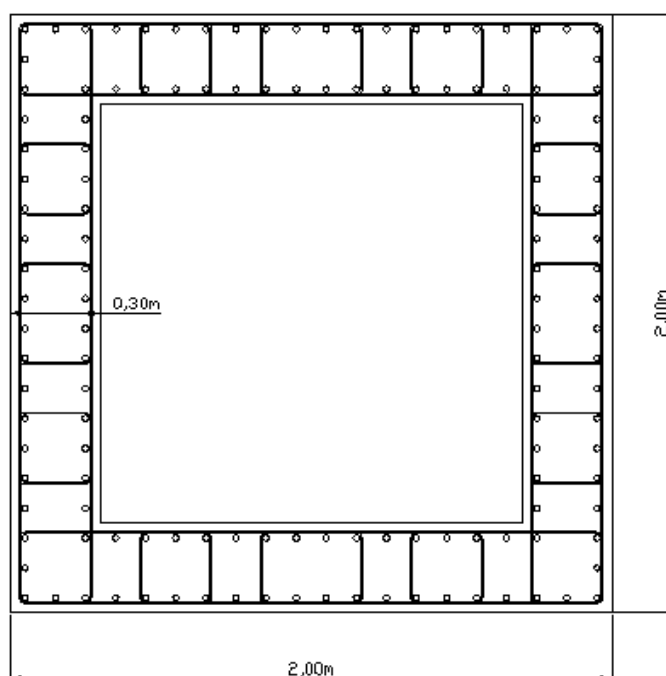
Armaduras	Secção (cm <sup>2</sup> )	Posição em relação ao topo (m)
A <sub>s1</sub>	12,56	0,05
A <sub>s2</sub>	6,28	0,15
A <sub>s3</sub>	6,28	0,25
A <sub>s4</sub>	6,28	0,35
A <sub>s5</sub>	6,28	0,45
A <sub>s6</sub>	6,28	0,55
A <sub>s7</sub>	6,28	0,65
A <sub>s8</sub>	12,56	0,75

Considerando um número de fatias  $N_f = 100$ , obteve-se um momento resistente de  $M_{Rd} = 872$  kN.m, com a linha neutra posicionada a 0,20 m do topo da secção. Utilizando o ábaco 64

das tabelas de betão armado do LNEC [Lima et al, 2004], calculou-se um momento resistente de cerca de 768 kN.m.

#### 4.4.3.2. Exemplo 2 – Secção quadrada oca

Para uma secção oca, com as dimensões exteriores de 2,00 m de altura e 2,00 m de largura, com uma parede de 0,30m de espessura, betão da classe de resistência C30/37, com armaduras nas faces exterior e interior de  $\varnothing 16/0,10$  num aço da classe A500 NR, determinou-se o diagrama de interacção  $M_{Rd} - N_{Rd}$ .

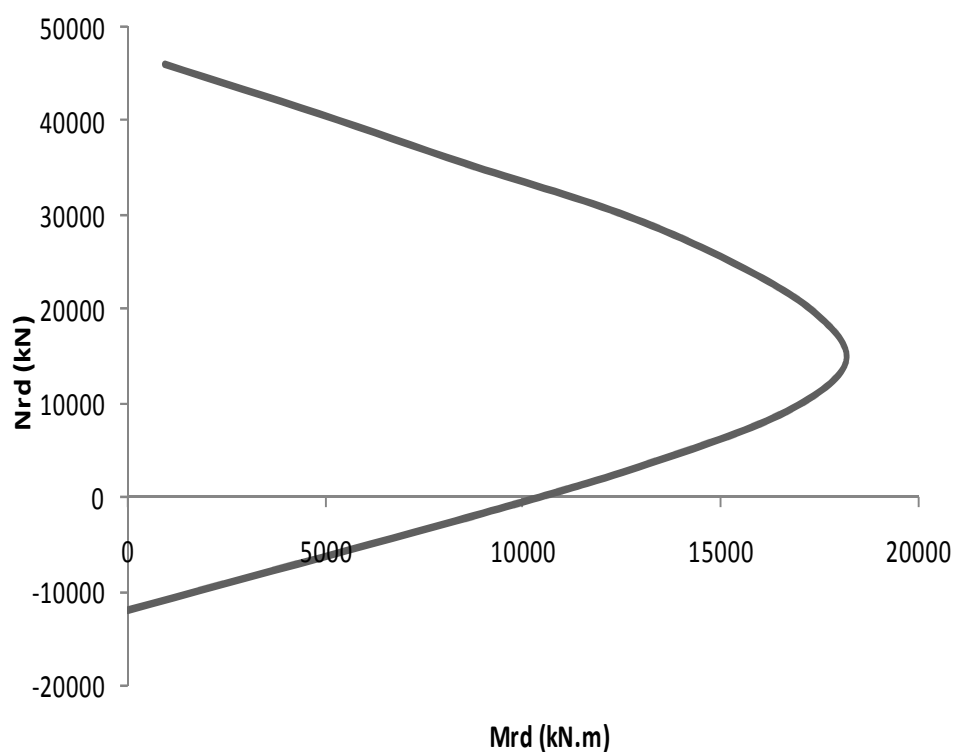


**Figura 4-8 – Secção oca de betão armado sujeita a flexão composta**

**Quadro 4-2 Camadas de armaduras consideradas**

Armaduras	Secção (cm <sup>2</sup> )	Posição em relação ao topo (m)
A <sub>s1</sub>	40,22	0,05
A <sub>s2</sub>	40,22	0,25
A <sub>s3</sub>	16,09	0,40
A <sub>s4</sub>	16,09	0,60
A <sub>s5</sub>	16,09	0,80
A <sub>s6</sub>	16,09	1,00
A <sub>s7</sub>	16,09	1,20
A <sub>s8</sub>	16,09	1,40
A <sub>s9</sub>	16,09	1,60
A <sub>s10</sub>	40,22	1,75
A <sub>s11</sub>	40,22	1,95

Considerando novamente uma discretização da secção de betão em 100 fatias, obteve-se automaticamente o diagrama de interacção  $M_{Rd} - N_{Rd}$  que se apresenta na Figura 4.9.



**Figura 4-9 Diagrama de interacção  $M_{Rd} - N_{Rd}$  da secção do exemplo 2.**

#### 4.4.3.1. Exemplo 3 – Secção vazada de geometria mais complexa

No terceiro exemplo considerou-se uma secção vazada de geometria mais complexa (Figura 4-10). A secção tem paredes periféricas de 0,30 m de espessura e uma parede interior com 0,35 m de espessura. Considerou-se betão da classe C30/37 e armaduras, nas faces exterior e interior, de  $\phi 16/0,10$ , num aço da classe A500 NR.

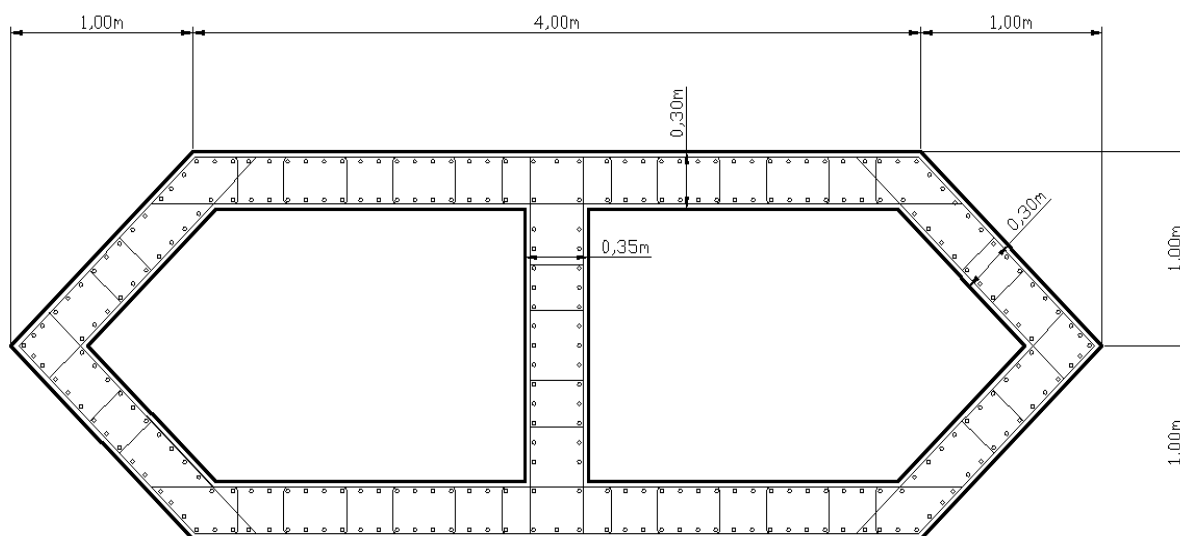
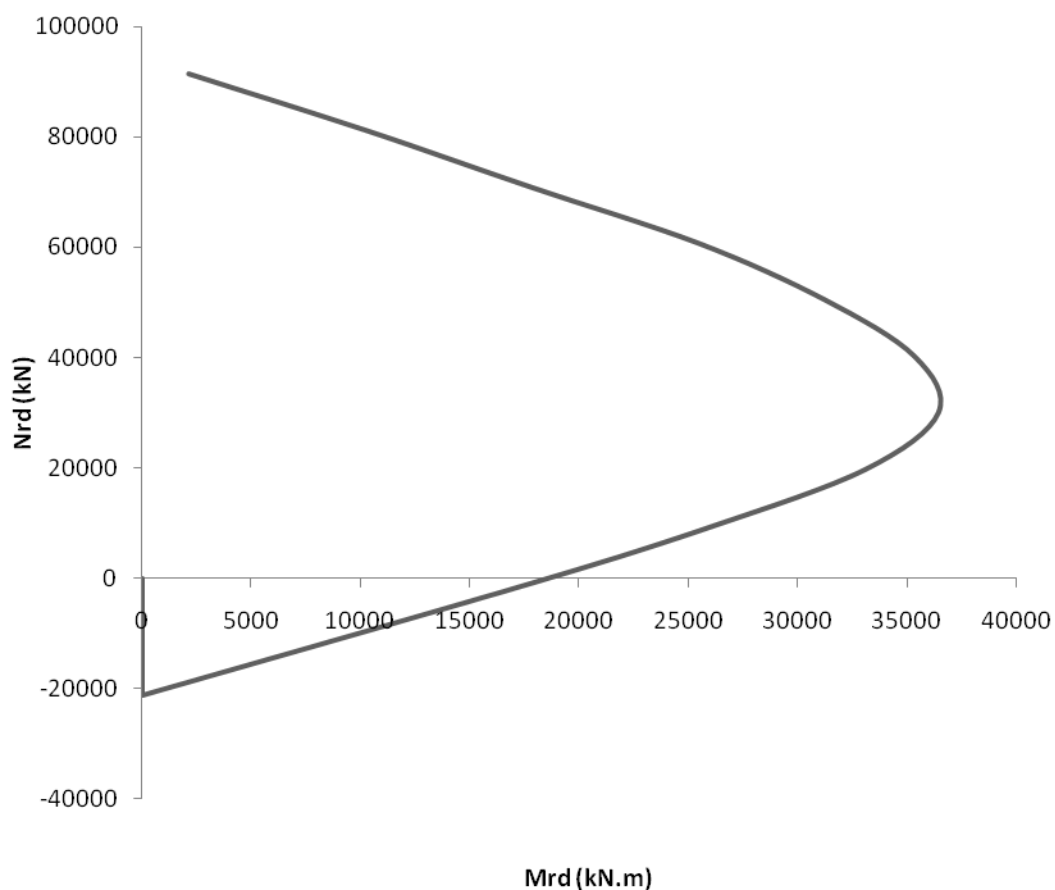


Figura 4-10 – Secção oca de betão armado, sujeita a flexão composta.

Quadro 4-3 – Camadas de armaduras consideradas

Armaduras	Secção (cm <sup>2</sup> )	Posição em relação ao topo (m)
A <sub>s1</sub>	79,64	0,05
A <sub>s2</sub>	79,64	0,25
A <sub>s3</sub>	24,12	0,40
A <sub>s4</sub>	24,12	0,60
A <sub>s5</sub>	24,12	0,80
A <sub>s6</sub>	24,12	1,00
A <sub>s7</sub>	24,12	1,20
A <sub>s8</sub>	24,12	1,40
A <sub>s9</sub>	24,12	1,60
A <sub>s10</sub>	79,64	1,75
A <sub>s11</sub>	79,64	1,95

Considerando a discretização da secção de betão em 100 fatias, obteve-se automaticamente o diagrama de interacção  $M_{Rd} - N_{Rd}$  que se apresenta na Figura 4.11.



**Figura 4-11 - Diagrama de interacção  $M_{Rd} - N_{Rd}$  da secção do exemplo 3.**



## 5. CASOS DE ESTUDO

Com a finalidade de comparar os resultados dos métodos simplificados do EC2 com os resultados obtidos através de modelação física e geometricamente não linear, desenvolvida no âmbito de duas teses de mestrado pré-Bolonha [Almeida, 2004; Marchão, 2006], serão tratados casos de estudo adaptados destes trabalhos.

### 5.1. CASO DE ESTUDO 1

#### 5.1.1. Descrição da estrutura

Para a aferir a sensibilidade dos efeitos de segunda ordem numa estrutura com pilares com alturas diferentes, ligados entre si por um tabuleiro rígido no seu plano, foi utilizado um exemplo da autoria do Eng<sup>o</sup> Manuel de Almeida, apresentado na sua tese de mestrado pré-Bolonha [Almeida, 2004].

O pórtico em análise tem três pilares P1, P2, e P3. O pilar P1 tem 10 m de altura e uma secção transversal quadrada com 2,00 m de lado, a que corresponde uma esbelteza de aproximadamente  $\lambda=35$ . Os pilares P2 e P3 têm a mesma secção transversal que o pilar P1 mas uma altura quatro vezes superior, aos quais corresponde uma esbelteza de aproximadamente  $\lambda=140$ . Todos os pilares dispõem de uma ligação rotulada ao tabuleiro.

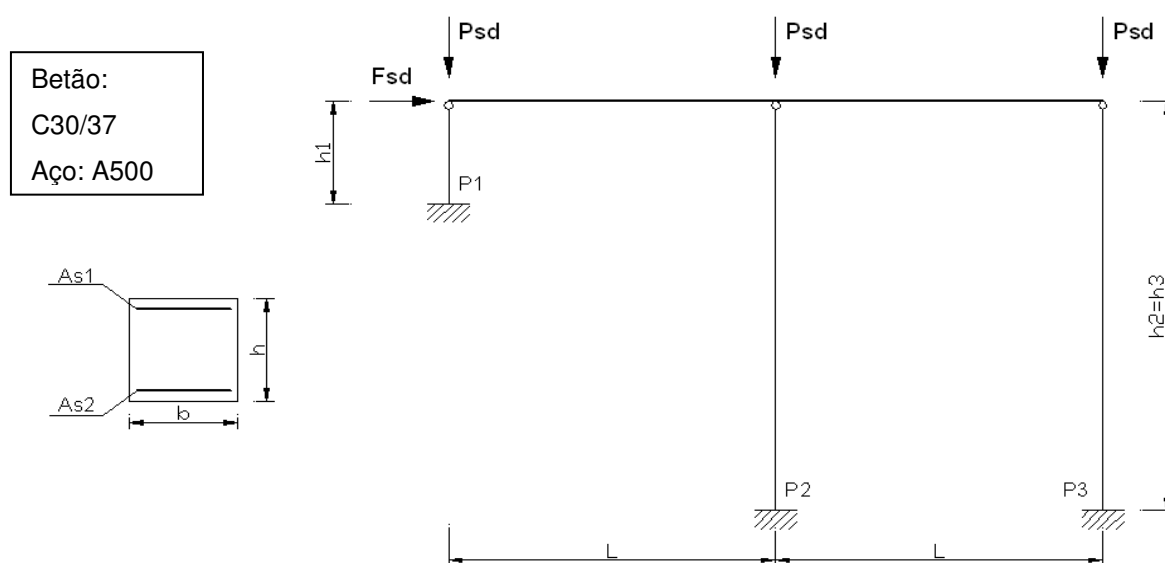
Todos os pilares estão sujeitos a um esforço axial correspondente a uma tensão de aproximadamente 20% da resistência à compressão do betão, ou seja,  $\sigma_{sd}=0,20 f_{cd}$ . Os materiais considerados foram o betão C30/37 e o aço A500.

No exemplo em questão os únicos esforços de 1<sup>a</sup> ordem são os resultantes das cargas aplicadas, sem considerar o peso próprio da estrutura e sem majoração de esforços de esforços.

Na Figura 5-1 apresenta-se o modelo estrutural e na tabela seguinte apresentam-se os restantes dados.

**Quadro 5-1 – Dados da estrutura do caso de estudo 1**

$P_{sd}$ (kN)	$F_{sd}$ (kN)	$b$ (m)	$h$ (m)	$L$ (m)	$h_1$ (m)	$h_2$ (m)	$h_3$ (m)
40000	2000	2,00	2,00	30,0	10,0	40,0	40,0



**Figura 5-1 – Pórtico considerado no caso de estudo 1**

O autor elaborou uma análise simplificada dos pilares com base nas disposições do REBAP, a partir da qual obteve as armaduras iniciais para a análise física e geometricamente não linear.

Com a finalidade de comparar os resultados da análise física e geometricamente não linear efectuada partindo dos métodos simplificados propostos no REBAP, foi também levada a efeito uma análise pelos métodos do EC2, considerando também os esforços de 1ª ordem sem majoração.

Usando o método simplificado do REBAP, também designado por método do pilar padrão, foram obtidos os resultados apresentados no Quadro 5-2.

**Quadro 5-2 - Resultados do dimensionamento efectuado pelo método do pilar padrão.**

Pilar	$e_a$ (m)	$M_1$ (kN.m)	Curvatura	$e_2$ (m)	$M_2$ (kN.m)	$M_{sd}$ (kN.m)
P1	0,066	19380	0,002	0.08	5840	25220
P2 e P3	0,266	1240	0,002	1.28	61840	63080

Com base nestes esforços foi realizado o dimensionamento das armaduras que se apresentam no Quadro 5-3.

**Quadro 5-3 - Armaduras resultantes do dimensionamento efectuado pelo método do pilar padrão.**

Pilar	$A_{s1}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s2}$ (cm <sup>2</sup> )
P1	135	135
P2 e P3	620	620

Com base nas quantidades de armaduras obtidas, o autor procedeu à realização de uma análise física e geometricamente não linear, com o objectivo de: i) averiguar a capacidade de carga da estrutura, através da determinação do valor do parâmetro de carga na rotura; ii) avaliar a distribuição de esforços nos pilares e a relação com a rigidez dos mesmos; iii) comparar a distribuição de esforços nos pilares obtidos com o método do pilar padrão e com a análise física e geometricamente não linear; iv) verificar se o valor do parâmetro de carga pode ser condicionado pela rotura de um dos pilares por excesso de deformação.

A análise confirmou que a estrutura não verificava a segurança, dando-se o colapso devido a rotura do pilar P1. Com base no dimensionamento efectuado pelo método do REBAP obtém-se um parâmetro de carga de  $\lambda = 0,924$ , a que correspondem os resultados apresentados no Quadro 5-4. Refira-se que o parâmetro de carga foi obtido com base num carregamento totalmente parametrizado.

**Quadro 5-4 Resultados da análise física e geometricamente não linear realizada para  $A_{s1}$**

$$(P1)=A_{s2}(P1)=135\text{cm}^2 \text{ e } A_{s1}(P2,P3)=A_{s2}(P2,P3)=620\text{ cm}^2$$

Pilar	$e_a$ (m)	$A_{s1}$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_{s2}$ ( $\text{cm}^2$ )	Curva- tura	$e_2$ (m)	$M_{Sd}$ TOTAL (kN.m)	$M_{Rd}$ (kN.m)	$\lambda$
P1	0,066	135	135	0,00275	0,065	26946	26946	0,924
P2 e P3	0,266	620	620	0,00011	0,065	4944	66317	

Mantendo as armaduras dos pilares P2 e P3, determinou-se que o pilar P1 necessitaria de pelo menos  $A_{s1}=A_{s2}=181\text{cm}^2$  para se obter  $\lambda = 1,0$ , ou seja, para verificar a segurança, a que corresponde os resultados apresentados no Quadro 5-5.

**Quadro 5-5 - Resultados na análise física e geometricamente não linear realizada para  $A_{s1}(P1)=$**

$$A_{s2}(P1)=181\text{ cm}^2 \text{ e } A_{s1}(P2,P3)= A_{s2}(P2,P3)= 620\text{cm}^2$$

PILAR	$e_a$ (m)	$A_{s1}$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_{s2}$ ( $\text{cm}^2$ )	Curva- tura	$e_2$ (m)	$M_{Sd}$ , TOTAL (kN.m)	$M_{Rd}$ (kN.m)	$\lambda$
P1	0,066	181	181	0,00263	0,063	29427	29427	1,00
P2 e P3	0,266	620	620	0,00010	0,063	4651	64214	

No método do REBAP quanto mais esbeltos são os pilares maiores são os efeitos de 2ª ordem, para pilares isolados. Nos pilares inseridos em pórticos há uma distribuição de esforços proporcionalmente à rigidez dos pilares e não em função da sua esbelteza.

Dada a grande diferença de rigidez entre o pilar P1 e os pilares P2 e P3, os esforços obtidos no pilar P1 são praticamente independentes das armaduras adoptadas para os pilares P2 e P3. Variando a armadura dos pilares P2 e P3, desde a armadura mínima de flexão até à armadura máxima de flexão, o valor da armadura do pilar P1 sofre poucas alterações porque, face à sua elevada rigidez, o acréscimo de armadura pouco contribui para o aumento da rigidez. Assim, o dimensionamento dos pilares pode resumir-se à adopção da armadura mínima para os pilares P2 e P3, o que ainda corresponde a  $M_{Rd} \gg M_{Sd}$ , e ao cálculo da armadura do pilar P1 para que seja verificada a segurança. Da análise obtiveram-se os resultados no Quadro 5-46.

**Quadro 5-6 - Resultados na análise física e geometricamente não linear realizada para  $A_{s1}(P1)=A_{s2}(P1)=198 \text{ cm}^2$  e  $A_{s1}(P2,P3)=A_{s2}(P2,P3)=120 \text{ cm}^2$ .**

PILAR	$e_a$ (m)	$A_{s1}$ ( $\text{cm}^2$ )	$A_{s2}$ ( $\text{cm}^2$ )	Curva- tura	$e_2$ (m)	$M_{sd}$ total (kN.m)	$M_{Rd}$ (kN.m)	$\lambda$
P1	0,066	198	198	0,00265	0,064	30764	30764	1,00
P2 e P3	0,266	120	120	0,00009	0,064	2103	24638	

A solução adoptada permitiu verificar a segurança ( $\lambda=1,00$ ), utilizando-se, na totalidade dos pilares, apenas 32% da armadura que se obteve pelo método simplificado do REBAP.

### 5.1.2. Análise pelos métodos do EC2

Para efectuar uma análise simplificada, o autor apresenta os esforços nos pilares resultantes de uma análise de primeira ordem.

**Quadro 5-7 - Esforços de dimensionamento**

Pilar	$N_{sd}$ (kN)	$M_{0Qp}$ (kN.m)	$M_{0Sd}$ (kN.m)
P1	-42816	9695	19390
P2	-34368	620	1240
P3	-42815	620	1240

#### 5.1.2.1. Verificação da necessidade de consideração dos efeitos de segunda ordem

A verificação da necessidade de consideração de efeitos de segunda ordem é efectuada através do critério da esbelteza limite apresentado na expressão ( 2-9).

Os valores obtidos para a esbelteza e limite de esbelteza dos diferentes pilares, bem como para os diversos parâmetros necessários ao seu cálculo, são apresentados nos quadros seguintes.

**Quadro 5-8 – Cálculo da esbelteza**

Pilar	i (m)	$l_0$ (m)	$\lambda$
P1	0,577	20	34,6
P2	0,577	80	138,6
P3	0,577	80	138,6

**Quadro 5-9 – Cálculo do coeficiente de fluência efectivo**

Pilar	$\varphi_{(\infty;t(t))}$	$M_{0Qp}$ (kN.m)	$M_{0Sd}$ (kN.m)	$\varphi_{ef}$
P1	2,3	9695	19390	1,8
P2	2,3	620	1240	1,8
P3	2,3	620	1240	1,4

**Quadro 5-10 – Cálculo da esbelteza limite**

Pilar	$\varphi_{ef}$	$\Omega$	A	B	C	n	$\lambda_{lim}$
P1	1,15	0,15	0,81	1,14	0,70	0,54	17,57
P2	1,15	0,67	0,81	1,53	0,70	0,43	26,40
P3	1,15	0,67	0,81	1,53	0,70	0,54	23,65

De seguida apresenta-se um quadro comparativo entre a esbelteza de cada pilar e a sua esbelteza limite.

**Quadro 5-11 – Comparativo entre a esbelteza e a esbelteza limite**

Pilar	$\lambda$	$\lambda_{lim}$
P1	34,6	17,57
P2	138,6	26,40
P3	138,6	23,65

Da comparação apresentada no Quadro 5-11 resulta que é necessário considerar os efeitos de segunda ordem em todos os pilares.

### 5.1.2.2. Método da rigidez nominal

Os valores da rigidez nominal são apresentados no quadro seguinte, tendo sido calculados de acordo com a expressão (3-1).

**Quadro 5-12 Estimativa da rigidez nominal**

Pilar	$K_c$	$E_{cd}$ (GPa)	$I_c$ (m <sup>4</sup> )	$K_s$	$E_s$ (GPa)	$I_s$ (m <sup>4</sup> )	$EI$ (kN.m <sup>2</sup> )
P1	0,06	24,75	1,33	1,20	200	0,0135	4673818
P2	0,11	24,75	1,33	1,20	200	0,0620	16002550
P3	0,11	24,75	1,33	1,20	200	0,0620	16002550

Os coeficientes  $K_s$  e  $K_c$  foram obtidos com base nas expressões (3-2) e (3-3).

Os esforços de primeira ordem são recalculados considerando para cada pilar a rigidez nominal, para ter em conta os efeitos da fendilhação, da fluência e da não linearidade do comportamento dos materiais.

**Quadro 5-13 – Esforços de 1ª ordem**

Pilar	$N_{sd}$	$M_{0sd}$
P1	-42816	18058
P2	-34368	3885
P3	-42816	3885

No quadro seguinte apresenta-se a determinação dos momentos de dimensionamento.

**Quadro 5-14 – Determinação dos momentos de dimensionamento**

Pilar	$l_0$ (m)	$EI$ (kN.m <sup>2</sup> )	$N_B$ (kN)	$N_{sd}$ (kN)	$\frac{\beta}{N_B / N_{sd} - 1}$	$M_{0sd}$ (kN.m)	$M_{sd}$ (kN.m)
P1	20	4673818	-115321	-42816	0,73	18058	19189
P2	80	16002550	-24677	-34368	-4,37	3885	-9041
P3	80	16002550	-24677	-42816	-2,91	3885	-5799

Dado que a carga crítica  $N_B$  é inferior ao valor do esforço axial de dimensionamento dos pilares 2 e 3, este método não pode ser utilizado.

### 5.1.2.3. Método da curvatura nominal

As curvaturas consideradas para a determinação das excentricidades de segunda ordem, cujos valores se apresentam no Quadro 5-15, foram estimadas através da expressão ( 3-21).

**Quadro 5-15 Determinação da excentricidade de segunda ordem.**

Pilar	$n$	$n_u$	$K_r$	$\lambda$	$\beta$	$K_\phi$	$1/r_0$ (m <sup>-1</sup> )	$1/r$ (m <sup>-1</sup> )	$l_0$ (m)	$e_2$ (m)
P1	0,54	2,85	0,94	34,64	0,27	1,29	0,00284	0,00345	20	0,14
P2	0,43	1,67	0,98	138,56	-0,42	1,00	0,00284	0,00277	80	1,77
P3	0,54	1,67	0,89	138,56	-0,42	1,00	0,00284	0,00254	80	1,62

A curvatura base ( $1/r_0$ ) e os coeficientes  $K_r$  e  $K_\phi$  foram obtidos através das expressões ( 3-27), ( 3-22) e ( 3-25), respectivamente.

Já que as armaduras dos pilares não se encontram concentradas em lados opostos, mas parte está distribuída nas faces paralelas ao plano de flexão, a altura útil foi estimada através da seguinte expressão,

$$d = (h / 2) + i_s = 2,0 / 2 + 0,707 = 1,707 \text{ m}$$

onde  $i_s$  representa o raio de giração da totalidade da armadura.



### ***Determinação dos momentos de dimensionamento***

Os momentos totais de dimensionamento, incluindo os efeitos de segunda ordem, foram determinados utilizando as expressões ( 3-19) e ( 3-20), apresentando-se no Quadro 5-16 os valores obtidos para cada pilar.

**Quadro 5-16 Determinação dos momentos de dimensionamento**

<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>0Sd</sub> (kNm)</b>	<b>e<sub>2</sub> (m)</b>	<b>M<sub>2</sub> (kNm)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kNm)</b>
P1	-42816	19390	0,14	5914	25304
P2	-34368	1240	1,77	60968	62208
P3	-42815	1240	1,62	69510	70750

### **5.1.3. Comparação dos resultados obtidos pela AFGNL e pelos métodos simplificados**

Apresenta-se no Quadro 5-17 um resumo comparativo dos esforços de dimensionamento (esforço axial e momento flector) obtidos nas diversas análises efectuadas.

**Quadro 5-17 - Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos - esforços actuantes.**

	AFGNL da globalidade da estrutura		Método da estimativa da rigidez nominal		Método da estimativa da curvatura	
<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-42816	30764	-42816	31214	-42816	25304
P2	-34368	2103	-34368	Colapso	-34368	62208
P3	-42815	2103	-42815	Colapso	-42815	70750

Como se pode observar, existe uma grande diferença entre os esforços obtidos pelos métodos simplificados do EC2 e os calculados por meio de uma análise física e geometricamente não linear.

Verifica-se que caso a estrutura fosse dimensionada com os esforços obtidos pelos métodos do EC2 entraria em colapso, por rotura do pilar P1, uma vez que os valores apresentados na AFGNL dizem respeito a esforços calculados para a armadura mínima necessária ( $M_{rd} = M_{sd}$ ), sendo inferiores aos esforços de dimensionamento obtidos pelo EC2.

No Quadro 5-18 apresentam-se os esforços que foram obtidos na base de cada pilar, com uma organização adequada à sua utilização pela formulação apresentada em “3.3- ADAPTAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLISE PARA PILARES DE PONTES”, que requer a determinação das excentricidades equivalentes de segunda ordem.

**Quadro 5-18 - Excentricidades equivalentes**

Pilar	$N_{sd}$ (kN)	Método da estimativa da curvatura			
		$M_2$ (kN)	$e_2$ (m)	$e_0$ (m)	$M_{sd}$ (kN.m)
P1	-42816	5914	0,14	0,032	26658
P2	-34368	60968	1,77	0,063	64382
P3	-42815	69510	1,62	0,063	73457

#### **5.1.4. Análise dos resultados obtidos pelos métodos simplificados considerando a globalidade da estrutura**

##### **5.1.4.1. Ponderação simples das excentricidades de segunda ordem**

A excentricidade de segunda ordem do conjunto da estrutura, calculada pela média simples das excentricidades, conforme expressão ( 3-45), vale, para os esforços obtidos pelo método da curvatura nominal,

$$e_{2m} = \frac{0,14 + 1,77 + 1,62}{3} = 1,18m$$

No Quadro 5-19 apresentam-se os correspondentes valores de dimensionamento.

**Quadro 5-19 – Esforços obtidos com a média das excentricidades de 2ª ordem**

		Método da curvatura nominal e técnica da excentricidade média		
Pilar	$N_{Sd}$ (kN)	$e_{2m}$ (m)	$M_2$ (kN)	$M_{Sd}$ (kN.m)
P1	-42816	1,18	50460	71204
P2	-34368	1,18	40504	43917
P3	-42815	1,18	50459	54407

#### 5.1.4.2. Ponderação das excentricidades de segunda ordem de acordo com a rigidez

A excentricidade de segunda ordem do conjunto da estrutura, calculada através da média ponderada das excentricidades, de acordo com a rigidez de cada elemento, conforme expressão ( 3-49), é de 0,033 m.

**Quadro 5-20 – Esforços calculados pela técnica de análise global ponderada**

Pilar	Método da curvatura nominal e técnica de análise global ponderada				
	$N_{Sd}$ (kN)	$k$ (kN/m)	$e_{2mk}$ (m)	$M_2$ (kN)	$M_{Sd}$ (kN.m)
P1	-42816	0,1320	0,033	7939	28683
P2	-34368	0,0021	0,033	6373	9786
P3	-42815	0,0021	0,033	7939	11887

### 5.1.5. Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos

Após a determinação dos esforços de dimensionamento pelos métodos simplificados considerando os pilares isoladamente, foram calculados os esforços correspondentes à utilização das duas técnicas de consideração do comportamento global, com vista à comparação com os resultados obtidos na análise física e geometricamente não linear. No Quadro 5-21 é assim apresentado um resumo dos valores obtidos pelos diversos métodos.

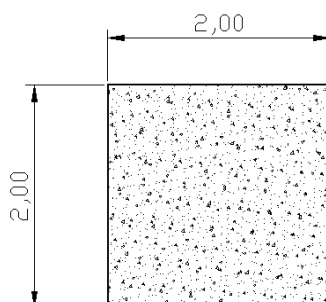
**Quadro 5-21 – Resumo geral dos resultados obtidos**

<b>Pilar</b>	Método geral	Método da curvatura nominal		
	Análise física e geometricamente não linear (AFGNL)	Análise regulamentar (EC2)	EC2 com técnica de análise global simples	EC2 com técnica de análise global ponderada
	<b>M<sub>Sd</sub></b> <b>(kN.m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub></b> <b>(kN.m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub></b> <b>(kN.m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub></b> <b>(kN.m)</b>
P1	30764	26658	71204	28683
P2	2103	64382	43917	9786
P3	2103	73457	54407	11887

Analisando os resultados apresentados no Quadro 5-21 pode-se verificar que na técnica de análise global simples foram obtidos valores muito superiores aos calculados com a técnica de análise global ponderada. No entanto, estes são também superiores aos obtidos na análise física e geometricamente não linear. Assim, a técnica de análise global ponderada afigura-se como a mais adequada. Deve ainda referir-se que o método da rigidez nominal não pode ser aplicado a este caso já que é ultrapassado o valor da carga crítica de Euler.

### 5.1.6. Cálculo da capacidade resistente

A secção dos pilares do viaduto é apresentada na figura 5-2 e nos quadros 5-22 e 5-23 listam-se as armaduras consideradas nos pilares P1 e P2-P3, respectivamente.



**Figura 5-2 – Geometria da secção dos pilares**

**Quadro 5-22 – Armaduras consideradas na secção do pilar P1**

Camada	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$d_s$ (m)
1	181	0,05
2	181	1,95

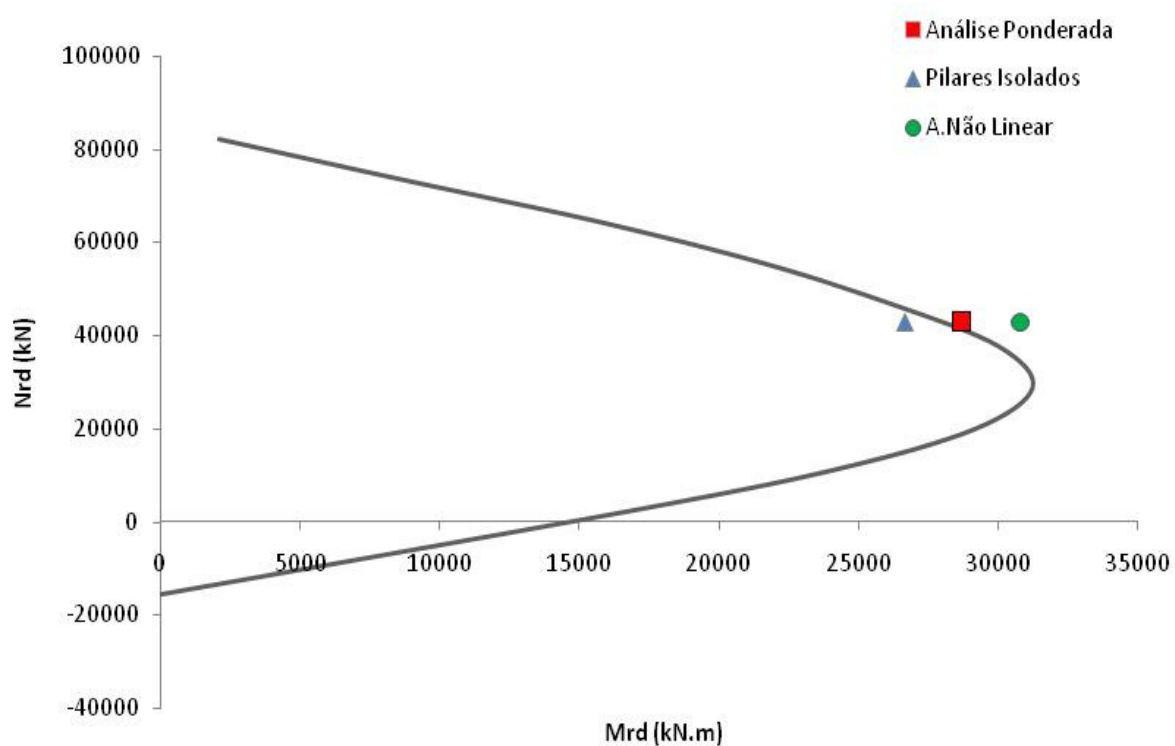
**Quadro 5-23– Armaduras consideradas na secção dos pilares P2 e P3**

Camada	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$d_s$ (m)
1	620	0,05
2	620	1,95

Para as secções da base dos pilares P1 e P2-P3 apresentam-se, respectivamente no Quadro 5-24 e no Quadro 5-25 a listagem dos esforços resistentes das secções, que deram origem aos diagramas de interacção  $N_{Rd}$ - $M_{Rd}$  da Figura 5-3 e da Figura 5-34, nos quais foram representados os esforços de cálculo obtidos pelos diferentes métodos, para verificação da capacidade resistente da secção.

**Quadro 5-24 – Esforços resistentes obtidos para a secção da base do pilar P1**

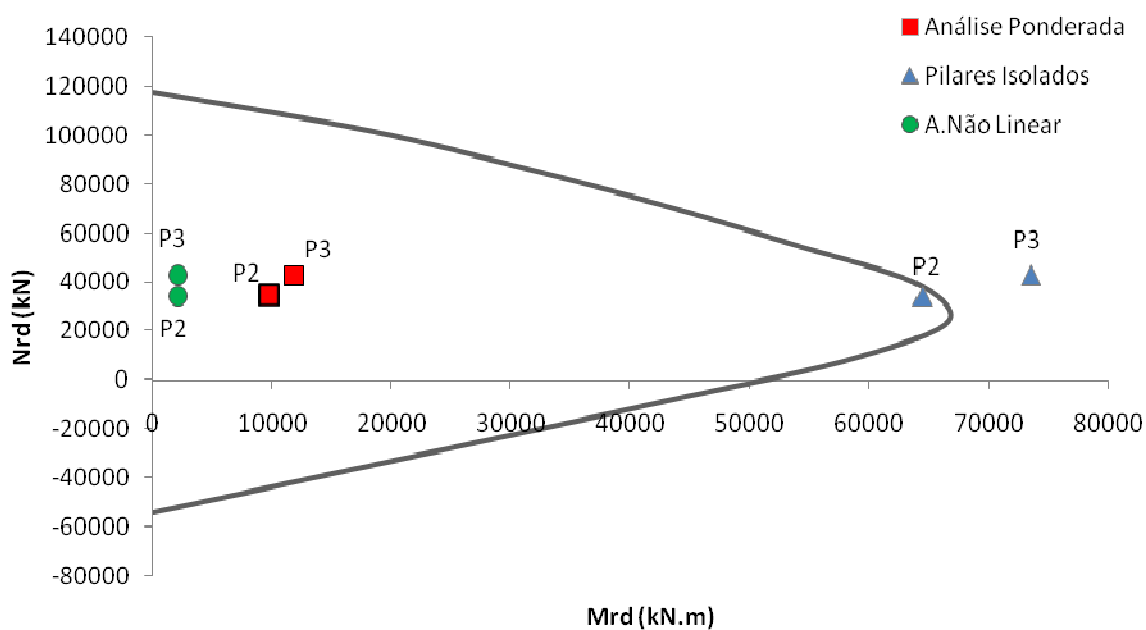
$N_{Rd}$ (kN)	$M_{Rd}$ (kN.m)
-15000	710
2600	17150
11500	24424
20300	29025
29000	31243
40000	29032
50000	24525



**Figura 5-3 – Diagrama de interacção  $M_{Rd} - N_{Rd}$  para o pilar P1, com indicação dos esforços actuantes de cálculo.**

**Quadro 5-25 - Esforços resistentes obtidos para a secção da base dos pilares P2 e P3**

$N_{Rd}$ (kN)	$M_{Rd}$ (kN.m)
-15000	36960
2600	53135
11500	60707
20300	65308
29000	67527
40000	63646
50000	57694



**Figura 5-4 - Diagrama de interação  $M_{Rd}$  –  $N_{Rd}$  para os pilares P2-P3, com representação dos esforços actuantes de cálculo.**

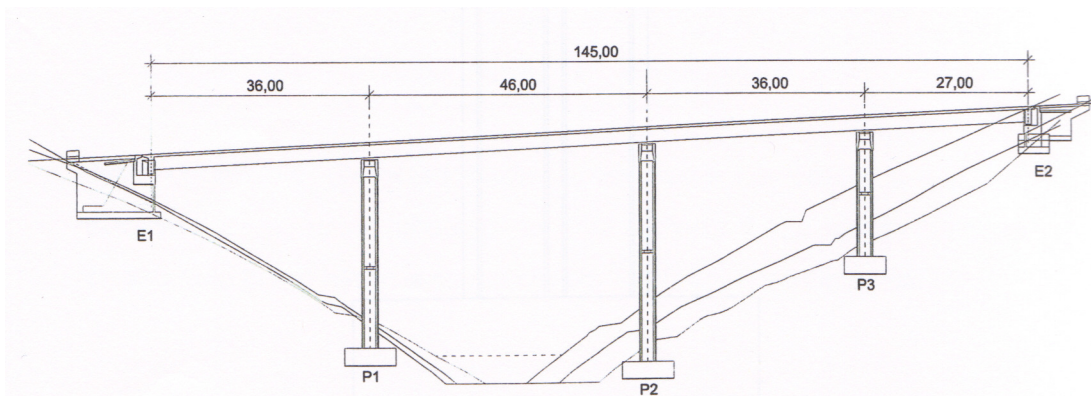




## 5.2. CASO DE ESTUDO 2

### 5.2.1. Descrição da estrutura

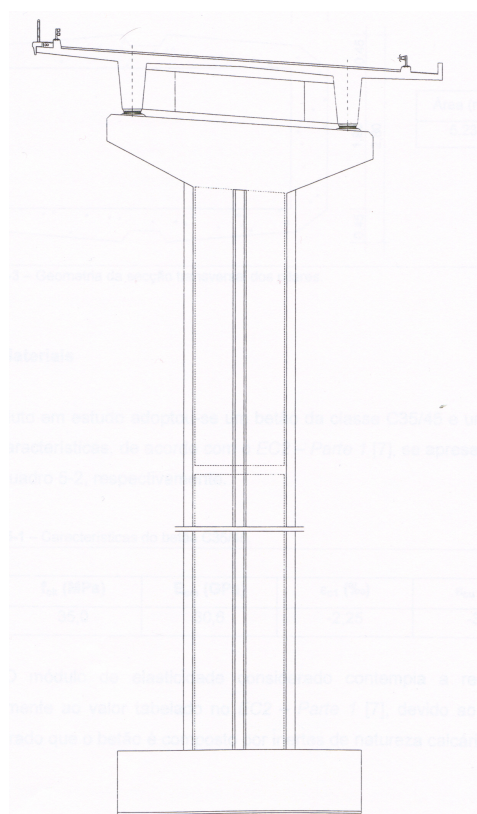
O segundo caso de estudo foi retirado da tese de mestrado (pré-Bolonha) da Eng<sup>a</sup> Carla Marchão [Marchão, 2006]. Trata-se de um viaduto rodoviário constituído por dois tabuleiros geminados em laje vigada, com duas vigas principais de altura constante por tabuleiro. A superestrutura tem um comprimento total de 145,00 m, subdividido em quatro tramos com comprimentos de 36,00 m, 46,00 m, 36,00 m e 27,00 m, conforme se apresenta da Figura 5-5.



**Figura 5-5 – Corte longitudinal do viaduto do caso de estudo 2.**

Em cada alinhamento de apoio existem dois pilares independentes (um para cada tabuleiro). No topo dos pilares existe um capitel que permite o apoio das duas vigas de cada tabuleiro (Figura 5-6).

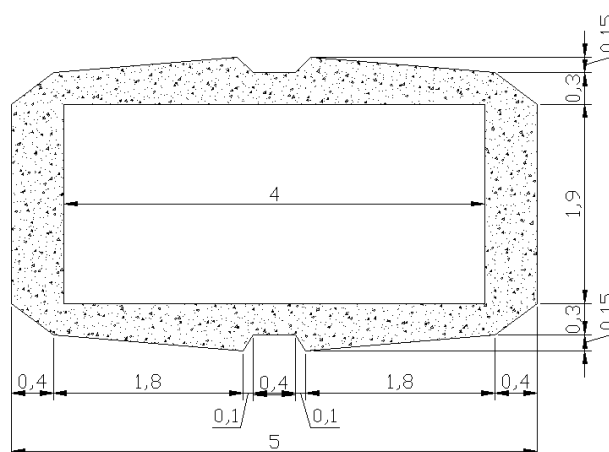
A ligação do tabuleiro aos pilares é efectuada através de aparelhos de apoio fixos, permitindo a rotação relativa entre aqueles dois elementos estruturais.



**Figura 5-6 - Alçado do pilar e corte transversal do tabuleiro.**

Os pilares P1, P2 e P3 possuem secção transversal constante, cuja forma geométrica se inscreve num rectângulo de 2,8 m x 5,0 m (Figura 5-7), e alturas teóricas de 32,0 m, 36,7 m e 21,3 m, respectivamente. A meia altura possuem um diafragma. As fundações são directas, realizadas por sapatas de 2,75 m de espessura.

A secção dos pilares tem uma área de 5,23 m<sup>2</sup> e um momento de inércia de 4,87 m<sup>4</sup>.



**Figura 5-7 – Geometria da secção transversal dos pilares.**

Apresenta-se apenas a análise da estrutura correspondente ao tabuleiro para o qual os pilares apresentam uma altura maior.

### 5.2.2. Materiais

Considerou-se para os pilares betão da classe C35/45 e aço A500 NR, cujas características mecânicas, de acordo com o EC2, se apresentam no Quadro 5-26 e no Quadro 5-267, respectivamente.

**Quadro 5-26 – Características do betão C35/45**

$f_{ck}$ (MPa)	$E_{cm}$ (GPa)	$\epsilon_{c1}$ (‰)	$\epsilon_{cu}$ (‰)
35,0	30,6	-2,25	-3,5

**Quadro 5-27 – Características do aço A500 NR**

$f_{yk}$ (MPa)	$E_s$ (GPa)	$E_{s1}$ (GPa)	$\epsilon_{uk}$ (‰)
500,0	200,0	1,0	50,0

O módulo de elasticidade considerado para o betão contempla uma redução de 10% relativamente ao valor tabelado no EC2, devido ao facto de se ter considerado que o betão é

composto por agregados de natureza calcária. Para o aço, o valor módulo de elasticidade  $E_{s1}$  e o valor característico da extensão de rotura foram arbitrados dentro dos limites indicados pelo EC2.

### 5.2.3. Cálculo da capacidade resistente da secção

Foi considerada a geometria da secção representada na Figura 5-7. As armaduras consideradas constam do Quadro 5-28.

**Quadro 5-28 – Quantidades e localização de armaduras**

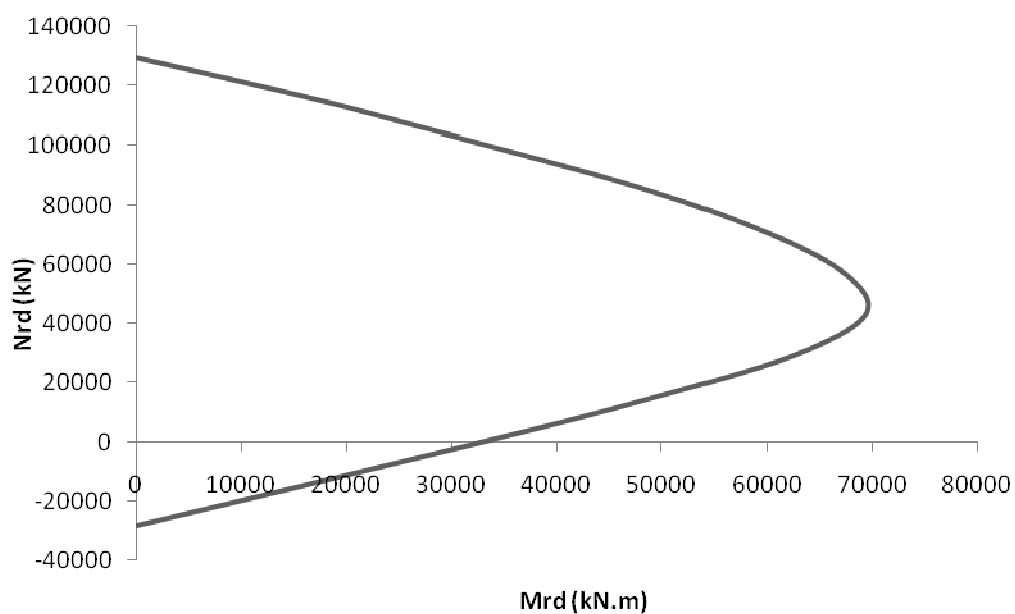
Camada	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$d_s$ (m)
1	108,02	0,15
2	108,02	0,40
3	43,2	0,60
4	43,2	1,00
5	43,2	1,40
6	43,2	1,80
7	43,2	2,20
8	108,02	2,40
9	108,02	2,65

Para o cálculo da capacidade resistente foi usado o programa de cálculo desenvolvido, cujo algoritmo foi descrito no capítulo 4.

No Quadro 5-29 é apresentado uma listagem de esforços resistentes da secção analisada, que deram origem ao diagrama de interacção  $N_{Rd}$ - $M_{Rd}$  da Figura 5-38.

**Quadro 5-29 – Resumo de esforços resistentes obtidos**

<b><math>N_{Rd}</math></b> <b>(kN)</b>	<b><math>M_{Rd}</math></b> <b>(kN.m)</b>
-25000	3834
-10000	21459
5000	38359
20000	54229
35000	66 202
50000	69844
65000	63233



**Figura 5-8 - Diagrama de interacção  $M_{Rd} - N_{Rd}$  da secção da base dos pilares.**

#### 5.2.4. Definição das acções

Para a verificação da segurança dos pilares considerou-se a acção do peso próprio dos pilares e tabuleiro, pré-esforço e restantes cargas permanentes do tabuleiro e sobrecargas rodoviárias regulamentares (consideradas de acordo com o RSA).

Consideraram-se também os encurtamentos do tabuleiro devidos à retracção e ao efeito da fluência.

##### 5.2.4.1. Acções permanentes

Para a determinação do peso próprio dos elementos estruturais considerou-se para peso específico do betão armado e pré-esforçado o valor  $\gamma = 25 \text{ kN} / \text{m}^3$ , estando apresentados no Quadro 5-30 os valores obtidos para as cargas distribuídas.

**Quadro 5-30 – Valores obtidos para o peso próprio do tabuleiro e pilares**

Elemento	Peso próprio (kN/m)
Tabuleiro	272,3
Pilares	130,8

Para as restantes cargas permanentes de cada tabuleiro foi considerado o valor de 50 kN/m.

Dado o seu pequeno valor, foram desprezadas as reacções verticais nos pilares devidas aos esforços hiperestáticos do pré-esforço, mas considerou-se o encurtamento instantâneo e diferido do tabuleiro devido à acção do pré-esforço. Para a determinação destes efeitos considerou-se uma tensão média de compressão inicial de 2,8 MPa, e após perdas diferidas de 2,4 MPa. Considerou-se ainda que o pré-esforço foi aplicado aos 3 dias de idade do betão.

Os valores considerados para o módulo de elasticidade do betão foram obtidos de acordo com o parágrafo 3.1.3 do EC2.

Consideraram-se os encurtamentos do tabuleiro ao longo do tempo, resultantes dos efeitos da fluência e da retracção. Os valores do coeficiente de fluência e da extensão de retracção

foram obtidos com base no disposto no parágrafo 3.1.4 do EC2, considerando que o betão foi fabricado com cimento de endurecimento rápido (classe R) e o valor de 70% para a humidade relativa ambiente. Adoptou-se para o coeficiente de envelhecimento  $\chi$  o valor de 0,80, conforme proposto no EC2. No Quadro 5-31 apresentam-se os valores calculados para as deformações instantânea  $\epsilon_c(t_0)$ , de fluência  $\epsilon_{cc}(t_\infty, t_0)$ , de retração  $\epsilon_{cs}(t_\infty, t_0)$  e total a longo prazo  $\epsilon_c(t_\infty)$ .

**Quadro 5-31 – Deformações impostas consideradas para o tabuleiro**

Instantânea	Fluência	Retracção	Total
$\epsilon_c(t_0)$	$\epsilon_{cc}(t_\infty, t_0)$	$\epsilon_{cs}(t_\infty, t_0)$	$\epsilon_c(t_\infty)$
$0,9 \times 10^{-4}$	$1,7 \times 10^{-4}$	$4,0 \times 10^{-4}$	$6,6 \times 10^{-4}$

#### **5.2.4.2. Acções variáveis**

Considerou-se a sobrecarga uniformemente distribuída, na faixa de rodagem e bermas, de  $4,0 \text{ kN/m}^2$ , referente a pontes rodoviárias da classe I. Por simplificação não foi considerada a acção da sobrecarga linear na largura da faixa de rodagem.

Considerou-se a acção da frenagem como uma força horizontal actuando ao nível do pavimento, com o valor de  $30 \text{ kN/m}$ , uniformemente distribuída na sua largura.

Não foram consideradas as acções da sobrecarga nos passeios e da variação uniforme da temperatura.

#### **5.2.4.3. Combinação de acções**

Nas análises efectuadas considerou-se a seguinte combinação fundamental de acções,

$$S_d = 1,35 S_{pp} + 1,5 S_{rcp} + S_{c+s} + S_{pe} + 1,5 (S_{sc} + S_{fren})$$

( 5-1)

#### 5.2.4.4. Imperfeições geométricas

As excentricidades devidas às imperfeições geométricas foram consideradas de acordo com o estipulado pela expressão ( 3-33) do EC2.

**Quadro 5-32 – Valor das excentricidades iniciais a considerar no dimensionamento dos pilares**

Pilar	$l$ (m)	$l_0$ (m)	$\Theta_i$ (m <sup>-1</sup> )	$e_i$ (m)
P1	32,0	64,0	$1,77 \times 10^{-3}$	0,057
P2	36,7	73,3	$1,65 \times 10^{-3}$	0,061
P3	21,3	42,7	$2,17 \times 10^{-3}$	0,046

#### 5.2.5. Análise física e geometricamente não linear (AFGNL)

##### 5.2.5.1. Modelação da estrutura

Foram considerados dois modelos distintos, sendo o primeiro destinado à análise física e geometricamente não linear dos pilares P1, P2 e P3, supostos isolados, e o segundo destinado à análise global da estrutura, tendo em vista o estudo da interacção entre os vários pilares de um mesmo sistema estrutural [Marchão, 2006]. No entanto, nas comparações efectuadas consideraram-se apenas os resultados obtidos na análise global da estrutura, por serem mais representativas do comportamento real.

##### 5.2.5.2. Critério de segurança

#### Definição dos coeficientes de segurança dos materiais

Conforme referido no EC2, foram adoptados os coeficientes parciais de segurança que se apresentam no Quadro 5-33.



**Quadro 5-33 – Coeficientes parciais de segurança dos materiais adoptados na análise não linear (AFGNL)**

Betão		Aço
$\gamma_c$	$\gamma_{cE}$	$\gamma_s$
1,50	1,20	1,15

### Características dos materiais

Realizando a análise com coeficientes parciais de segurança, a aplicar às propriedades dos materiais, foram consideradas as relações constitutivas com os valores de cálculo das suas propriedades. Os valores de cálculo foram obtidos dos valores característicos das resistências e dos valores médios dos módulos de elasticidade, minorando, em ambos os casos, através do respectivo coeficiente parcial de segurança.

Apresentam-se no Quadro 5-34 e no Quadro 5-35 as características consideradas na definição das relações constitutivas do betão e do aço, respectivamente.

**Quadro 5-34 – Características consideradas para definição da relação constitutiva do betão**

$f_{ck}$ (MPa)	$E_{cm}$ (GPa)	$\epsilon_{c1}$ (‰)	$\epsilon_{cu}$ (‰)
35,0	30,6	-2,25	-3,5

**Quadro 5-35 - Características consideradas para definição da relação constitutiva do aço**

$f_{yk}$ (MPa)	$E_s$ (GPa)	$E_{s1}$ (GPa)	$\epsilon_{uk}$ (‰)
500,0	200,0	1,0	50,0

Apresentam-se no Quadro 5-36 os valores adoptados para os módulos de elasticidade efectivos e ajustado, bem como os valores dos parâmetros necessários à sua determinação. Salienta-se o facto de, também neste caso, se utilizarem os valores de cálculo dos módulos de elasticidade.

**Quadro 5-36 – Valores de cálculo dos módulos de elasticidade efectivo e ajustado.**

$E_{cd}(t_0)$ (GPa)	$E_{cd,28}$ (GPa)	$\phi(t, t_0)$	$\chi(t, t_0)$	$E_{cd,eff}$ (GPa)	$E_{cd,adj}$ (GPa)
22,6	25,5	2,3	0,8	7,4	8,6

### Consideração do efeito da fluência

De todas as acções permanentes consideradas (peso próprio da estrutura, restantes cargas permanentes do tabuleiro, encurtamento inicial e por fluência do tabuleiro devido ao pré-esforço e encurtamento do tabuleiro devido ao efeito da retracção), a retracção é a única que efectivamente provoca um acréscimo de tensão ao longo do tempo, devendo por isso utilizar-se, neste caso, o módulo de elasticidade ajustado. Em termos de cálculo assimilou-se o efeito da retracção à de uma diminuição uniforme de temperatura (Quadro 5-37).

**Quadro 5-37 – Variação de temperatura corrigida para simular os efeitos da retracção - análise com coeficientes parciais de segurança para as propriedades dos materiais.**

$E_{cd,eff}$ (GPa)	$E_{cd,adj}$ (GPa)	$\Delta T$ (°C)	$\Delta T'$ (°C)
7,4	8,6	40	46,5

O encurtamento do tabuleiro resultante da correcção referida foi obtido considerando o coeficiente de dilatação térmica do betão, dando origem aos valores do Quadro 5-38.

**Quadro 5-38 – Determinação do encurtamento a considerar para o tabuleiro devido à retracção.**

$\Delta T'$ (°C)	$\alpha$ (°C <sup>-1</sup> )	$L_{\text{tabuleiro}}$ (m)	$\Delta L$ (m)
46,5	$10^{-5}$	145	0,067

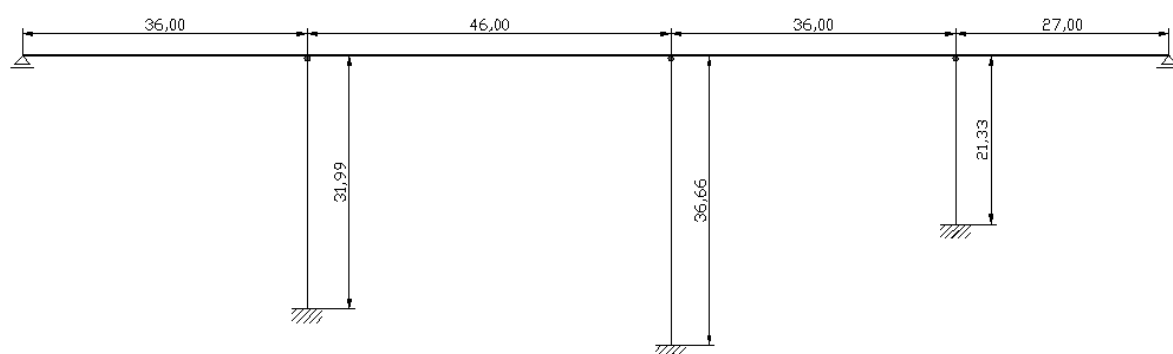
De seguida apresenta-se o cálculo da excentricidade inicial corrigida para cada um dos pilares ( $e_i'$ ).

**Quadro 5-39 – Cálculo da excentricidade inicial corrigida.**

Pilar	$\delta_s$ (m)	$\delta_s'$ (m)	$e_i$ (m)	$e_i'$ (m)
P1	0,024	0,028	0,057	0,053
P2	0,006	0,007	0,061	0,060
P3	0,009	0,010	0,046	0,047

### 5.2.5.3. Descrição do modelo de análise

O tabuleiro do viaduto foi modelado considerando elementos lineares com um comprimento de 4,50 m para todos os tramos, excepto o segundo, cujos elementos ficaram com um comprimento de 4,60 m. Dado que os pilares possuem no topo aparelhos de apoio fixos, a ligação ao tabuleiro foi considerada rotulada.



**Figura 5-9 – Modelo de cálculo adoptado para a estrutura.**

### 5.2.5.4. Resultados

Apresentam-se no Quadro 5-40 os esforços na base dos pilares (esforço axial e momento flector), obtidos no final de cada análise [Marchão, 2006], para as situações condicionantes, resultantes da análise dos pilares isolados e da estrutura global.

**Quadro 5-40 – Resumo dos resultados da análise não linear**

	AFGNL dos pilares isolados		AFGNL da estrutura global	
<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-28799	9780	-28786	10122
P2	-28799	6844	-28892	5281
P3	-28799	13384	-28773	10534

### 5.2.6. Análise pelos métodos simplificados do EC2

No Quadro 5-41 são apresentados os esforços nos pilares resultantes de uma análise linear, considerando as disposições do EC2 [Marchão, 2006].

**Quadro 5-41 – Resumo dos esforços nos pilares**

<b>Pilar</b>	<b>Esforço axial</b>	<b>Momento flector</b>	
		<b>Combinação quase permanente</b>	<b>Combinação fundamental</b>
	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>0Qp</sub> (kN.m)</b>	<b>M<sub>0Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-28765	-12503	-16245
P2	-28815	-3521	-6393
P3	-28778	9094	15423

#### 5.2.6.1. Verificação da necessidade de consideração dos efeitos de segunda ordem

A verificação da necessidade de consideração de efeitos de segunda ordem é efectuada através do critério da esbelteza limite (expressão (2-9)). Os valores da esbelteza e do seu valor limite dos diferentes pilares, bem como dos diversos parâmetros necessários ao seu cálculo, são apresentados nos quadros seguintes.

**Quadro 5-42 – Cálculo da esbelteza**

Pilar	i (m)	$l_0$ (m)	$\lambda$
P1	0,965	64,0	66,3
P2	0,965	73,3	76,0
P3	0,965	42,7	44,2

**Quadro 5-43 – Cálculo do coeficiente de fluência efectivo**

Pilar	$\varphi_{(\infty;t_0)}$	$M_{0qp}$ (kN.m)	$M_{0sd}$ (kN.m)	$\varphi_{ef}$
P1	2,3	-12503	-16245	1,8
P2	2,3	-3521	-6393	1,8
P3	2,3	9094	15423	1,4

**Quadro 5-44 – Esbelteza limite**

Pilar	$\varphi_{ef}$	$\omega$	A	B	C	N	$\lambda_{lim}$
P1	1,8	0,23	0,74	1,21	0,7	0,24	25,6
P2	1,8	0,23	0,79	1,21	0,7	0,24	27,3
P3	1,4	0,23	0,78	1,21	0,7	0,24	27,0

De seguida apresenta-se um quadro comparativo com a esbelteza de cada pilar e a esbelteza limite.

**Quadro 5-45 – Comparação entre a esbelteza e a esbelteza limite**

Pilar	$\lambda$	$\lambda_{lim}$
P1	66,3	25,6
P2	76,0	27,3
P3	44,2	27,0

Da comparação resulta que é necessário considerar os efeitos de segunda ordem em todos os pilares.

### 5.2.6.2. Método da rigidez nominal

Os valores da rigidez nominal dos pilares são apresentados no quadro seguinte, tendo sido calculados em acordo com a expressão ( 3-1).

**Quadro 5-46 – Cálculo da rigidez nominal**

Pilar	$K_c$	$E_{cd}$ (GPa)	$I_c$ (m <sup>4</sup> )	$K_s$	$E_s$ (GPa)	$I_s$ (m <sup>4</sup> )	$EI$ (kN.m <sup>2</sup> )
P1	0,04	25,5	4,87	1	200	0,0646	17887400
P2	0,06	25,5	4,87	1	200	0,0646	20371100
P3	0,03	25,5	4,87	1	200	0,0646	16645550

Os coeficientes  $K_s$  e  $K_c$  foram obtidos com base nas expressões ( 3-2) e ( 3-3).

Os esforços de primeira ordem foram recalculados considerando para cada pilar a rigidez nominal, por forma a ter em conta, embora de forma simplificada, os efeitos da fendilhação e da fluência, bem como a não linearidade do comportamento dos materiais.

**Quadro 5-47 – Esforços de 1ª ordem recalculados**

Pilar	$N_{sd}$ (kN)	$M_{0sd}$ (kN.m)
P1	-28765	-7397
P2	-28815	-5399
P3	-28778	-11024

No quadro seguinte é apresentado o cálculo dos momentos de dimensionamento.

**Quadro 5-48 – Cálculo dos momentos de dimensionamento**

Pilar	$l_0$ (m)	EI (kN.m <sup>2</sup> )	$N_B$ (kN)	$N_{sd}$ (kN)	$\frac{\beta}{N_B / N_{sd} - 1}$	$M_{0sd}$ (kN.m)	$M_{sd}$ (kN.m)
P1	64,0	17887400	-43101	-28765	2,01	-7397	-22265
P2	73,3	20371100	-37420	-28815	3,35	-5399	-23486
P3	42,7	16645550	-90104	-28778	0,47	-11024	-16205

### 5.2.6.3. Método da curvatura nominal

As curvaturas consideradas para a determinação da excentricidade de segunda ordem, cujos valores se apresentam no Quadro 5-49, foram estimadas através da expressão ( 3-21).

**Quadro 5-49 - Determinação da excentricidade de segunda ordem.**

Pilar	n	$n_u$	$K_r$	$\lambda$	$\beta$	$K_\phi$	$1/r_0$ (m <sup>-1</sup> )	$1/r$ (m <sup>-1</sup> )	$l_0$ (m)	$e_2$ (m)
P1	0,24	1,23	1,0	66,3	0,083	1,15	$2,014 \times 10^{-3}$	$2,316 \times 10^{-3}$	64,0	0,95
P2	0,24	1,23	1,0	76,0	0,018	1,02	$2,014 \times 10^{-3}$	$2,054 \times 10^{-3}$	73,3	1,10
P3	0,24	1,23	1,0	44,2	0,230	1,32	$2,014 \times 10^{-3}$	$2,658 \times 10^{-3}$	42,7	0,48

A curvatura base ( $1/r_0$ ) e os coeficientes  $K_r$  e  $K_\phi$  foram obtidos através das expressões ( 3-27), ( 3-22) e ( 3-25), respectivamente.

Já que as armaduras do pilar não se encontram concentradas em lados opostos, mas parte delas estão distribuídas nas faces paralelas ao plano de flexão, a altura útil foi estimada através da seguinte expressão do EC2,

$$d = (h / 2) + i_s = 2,8/2 + 0,999 = 2,40 \text{ m}$$

onde  $i_s$  representa o raio de giração da totalidade da armadura.

### ***Determinação dos momentos de dimensionamento***

Os esforços de dimensionamento, incluindo efeitos de segunda ordem, foram determinados utilizando as expressões ( 3-19) e ( 3-20), apresentando-se no Quadro 5-50 os valores obtidos para cada pilar.

**Quadro 5-50 - Determinação dos esforços de dimensionamento**

<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>0Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>e<sub>2</sub> (m)</b>	<b>M<sub>2</sub> (kN.m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-28765	16245	0,95	27327	43572
P2	-28815	6393	1,10	31697	38090
P3	-28778	15423	0,48	13813	29236

### **5.2.7. Comparação dos resultados obtidos pela AFGNL e pelos métodos simplificados do EC2**

Apresenta-se no Quadro 5-51 um resumo comparativo dos esforços de dimensionamento (esforço axial e momento flector) obtidos nas três análises.

**Quadro 5-51 - Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos - esforços actuantes de cálculo**

	AFGNL da estrutura global		Método da estimativa da rigidez nominal (pilares isolados)		Método da estimativa da curvatura (pilares isolados)	
<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-28786	10122	-28765	22265	-28765	43572
P2	-28892	5281	-28815	23486	-28815	38090
P3	-28773	10534	-28778	16205	-28778	29236



Como se pode observar, existe uma grande diferença entre os esforços obtidos pelos métodos simplificados propostos no EC2, em que os pilares são considerados isoladamente, e numa análise física e geometricamente não linear da estrutura completa [Marchão, 2006].

No Quadro 5-52 apresentam-se os esforços que foram obtidos na base de cada pilar, através dos métodos simplificados do EC2, com uma organização adequada à sua utilização pela formulação apresentada em “3.3- ADAPTAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE ANÁLISE PARA PILARES DE PONTES”, que requer a determinação das excentricidades equivalentes de segunda ordem.

**Quadro 5-52 – Excentricidades equivalentes de 2ª ordem**

	Método da estimativa da rigidez nominal				Método da estimativa da curvatura			
<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>2</sub> (kN)</b>	<b>e<sub>2</sub> (m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>2</sub> (kN)</b>	<b>e<sub>2</sub> (m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-28765	6020	0,21	22265	-28765	27327	0,95	43572
P2	-28815	17093	0,59	23486	-28815	31697	1,11	38090
P3	-28778	782	0,03	16205	-28778	13813	0,48	29236

## 5.2.8. Análise dos resultados obtidos pelos métodos simplificados considerando a estrutura global

### 5.2.8.1. Ponderação simples das excentricidades de segunda ordem

No método de ponderação simples o cálculo da excentricidade de segunda ordem do conjunto da estrutura é feito através da média simples das excentricidades, em acordo com a expressão ( 3-45).

Para os esforços obtidos da estimativa da rigidez nominal, tem-se:

$$e_{2m} = \frac{0,21 + 0,59 + 0,03}{3} = 0,28m$$

Para os esforços obtidos da estimativa curvatura, vem,

$$e_{2m} = \frac{0,95 + 1,11 + 0,48}{3} = 0,85m$$

**Quadro 5-53 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação simples das excentricidades dos diferentes pilares**

		Método da estimativa da rigidez nominal com a excentricidade média.			Método da estimativa da curvatura com a excentricidade média.		
Pilar	N <sub>Sd</sub> (kN)	e <sub>2m</sub> (m)	M <sub>2</sub> (kN)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)	e <sub>2m</sub> (m)	M <sub>2</sub> (kN)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)
P1	-28765	0,28	7956	24201	0,85	24381	40626
P2	-28815	0,28	7969	14362	0,85	24423	30816
P3	-28778	0,28	7959	23382	0,85	24392	39815

#### 5.2.8.2. Ponderação das excentricidades de segunda ordem de acordo com a rigidez

No método proposto de análise global ponderada o cálculo da excentricidade de segunda ordem do conjunto da estrutura é feita através da média ponderada das excentricidades, de acordo com a rigidez de cada elemento, conforme expressão ( 3-49). Os resultados obtidos são apresentados no Quadro 5-54 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação global das excentricidades dos diferentes pilares

**Quadro 5-54 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação global das excentricidades dos diferentes pilares**

			Método de análise global ponderada					
			Estimativa da rigidez nominal			Estimativa da curvatura		
Pilar	N <sub>Sd</sub> (kN)	k (kN/m)	e <sub>2mk</sub> (m)	M <sub>2</sub> (kN)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)	e <sub>2mk</sub> (m)	M <sub>2</sub> (kN)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)
P1	-28765	1 635	0,137	3953	20198	0,657	18886	35131
P2	-28815	1 235	0,137	3960	10353	0,657	18919	25312
P3	-28778	5 158	0,137	3955	19378	0,657	18895	34318

### 5.2.9. Comparação dos resultados obtidos pelos diferentes métodos

Após a determinação dos efeitos de segunda ordem pelos métodos simplificados do EC2 considerando os pilares isoladamente, e aplicando aos resultados as ponderações resultantes do funcionamento global da estrutura, é possível agora efectuar uma comparação com os resultados obtidos através de uma análise física e geometricamente não linear da estrutura [Marchão, 2006]. Assim, no Quadro 5-55 é apresentado um resumo dos valores obtidos pelos diversos métodos.

**Quadro 5-55 – Resumo geral dos resultados**

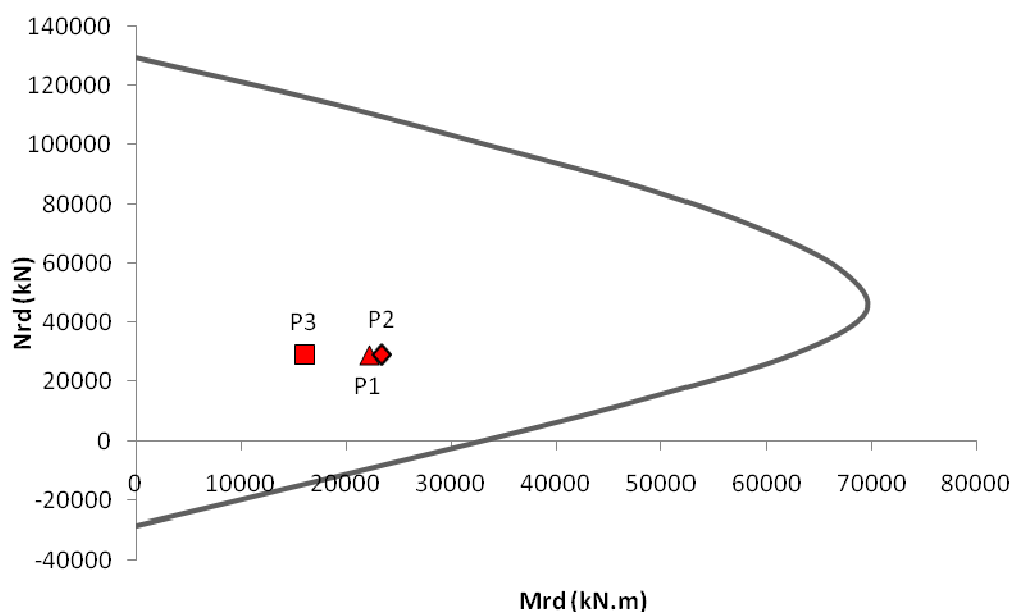
Pilar	Método geral	Estimativa da rigidez nominal			Estimativa da curvatura		
	Análise física e geométrica-mente não linear	Pilares isolados	Análise global simples	Análise global ponderada	Pilares isolados	Análise global simples	Análise global ponderada
	M <sub>Sd</sub> (kN.m)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)
P1	10122	22265	24201	20198	43572	40626	35131
P2	5281	23486	14362	10353	38090	30816	25312
P3	10534	16205	23382	19378	29236	39815	34318

Analisando os resultados apresentados no Quadro 5-55 pode verificar-se que os esforços obtidos na AFGNL são muito menores que os restantes. O método simplificado que apresenta resultados mais próximos da AFGNL é o método da estimativa da rigidez nominal descrito em 3.1.2, considerando a análise global ponderada da estrutura, conforme descrito em 3.3.3.

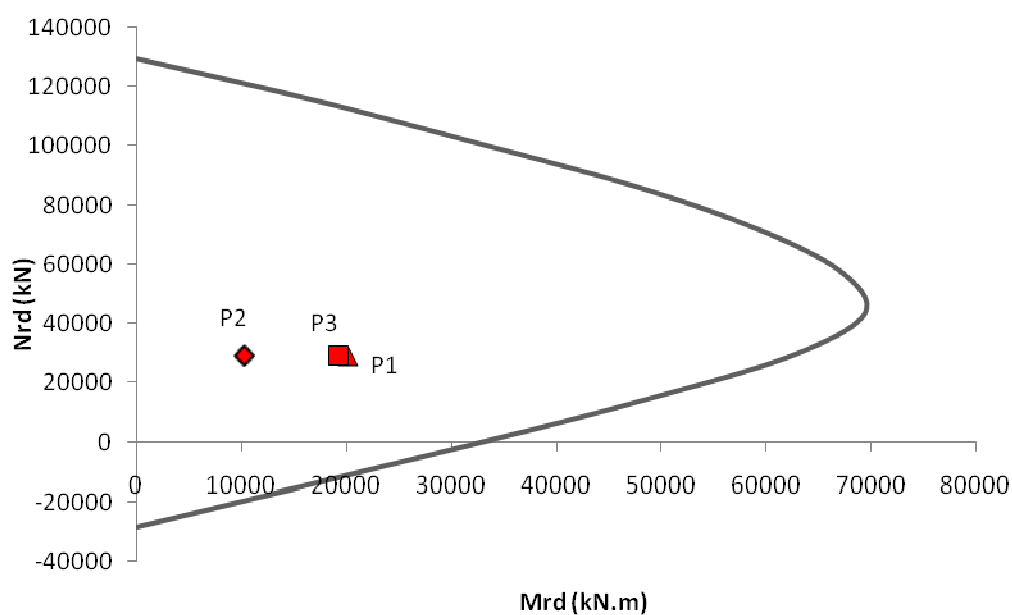
Comparando os resultados dos dois métodos propostos no EC2, para pilares isolados, com as análises global simples e ponderada proposta nesta tese, pode verificar-se que os resultados tendem para uma proporcionalidade relativamente aos obtidos com o método geral de AFGNL, penalizando os pilares mais rígidos e aliviando os pilares com rigidez inferior. Esta tendência já se verifica na análise global simples, mas observa-se uma maior aproximação ao método geral no caso da análise global ponderada, visto que os esforços nos pilares se reduzem significativamente, sendo, contudo, cerca de 90% a 100% superiores aos obtidos na AFGNL.

#### **5.2.10. Verificação da capacidade resistente**

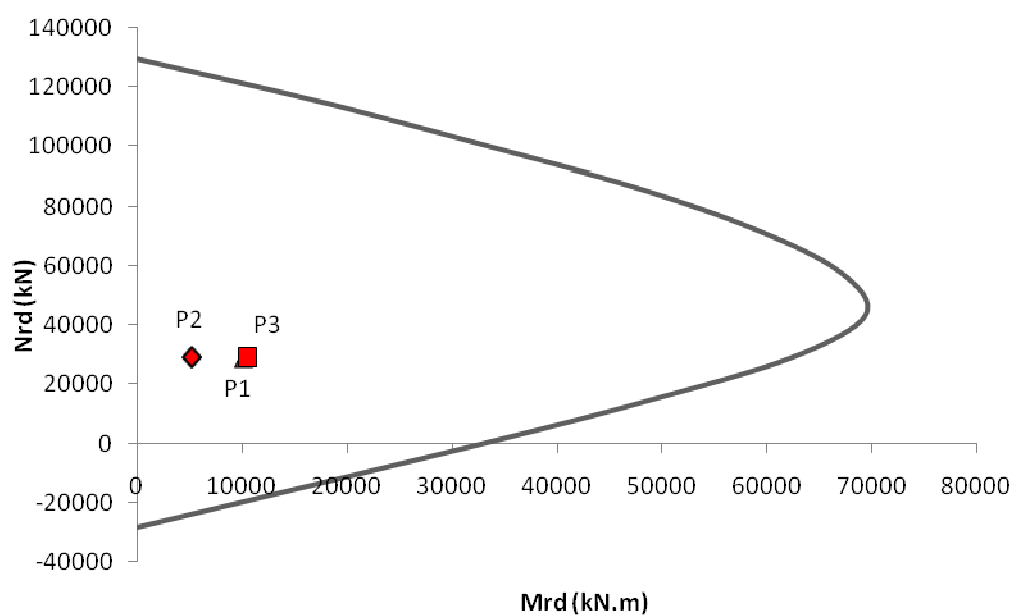
Nas três figuras seguintes apresentam-se os diagramas de interacção  $M_{rd} - N_{rd}$  da secção da base dos pilares e a verificação da segurança das secções, por meio da representação gráfica dos esforços de dimensionamento para os casos da análise dos pilares isolados pelo método da rigidez equivalente, da análise global ponderada pelo método da rigidez equivalente e da AFGNL.



**Figura 5-10 – Diagrama de interação  $M_{Rd} - N_{Rd}$ , com representação dos esforços obtidos na análise dos pilares isolados considerando o método da rigidez equivalente.**



**Figura 5-11 – Diagrama de interação  $M_{Rd} - N_{Rd}$ , com representação dos esforços obtidos na análise global ponderada considerando o método da rigidez equivalente.**

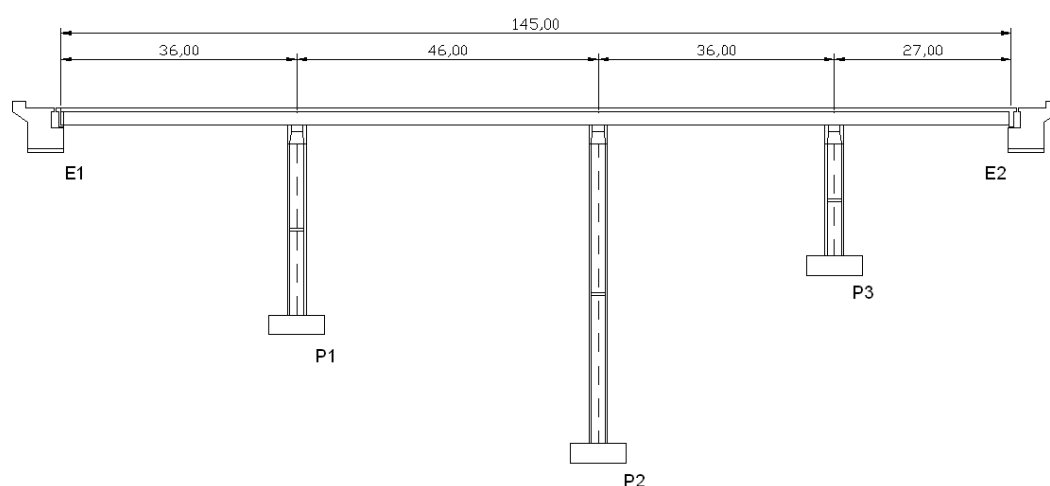


**Figura 5-12 – Diagrama de interacção  $M_{Rd} - N_{Rd}$ , com representação dos esforços obtidos na análise física e geometricamente não linear.**

## 5.3. CASO DE ESTUDO 3

### 5.3.1. Descrição da estrutura

O terceiro caso de estudo é em tudo idêntico ao anterior, tendo apenas sido muito aumentada a altura do pilar central (Figura 5-13).



**Figura 5-13 – Corte longitudinal do viaduto do caso de estudo 3.**

Os pilares P1 e P3 mantêm as alturas teóricas de 32,0 m e 21,3 m, respectivamente, mas a altura teórica do pilar central P2 aumenta para 50,0 m.

### 5.3.2. Materiais

Consideraram-se os mesmos materiais do exemplo anterior.

### 5.3.3. Acções e combinações de acções

#### 5.3.3.1. Definição de acções

Adoptaram-se as acções permanentes e variáveis do exemplo anterior, com excepção das deformações impostas devidas à retracção e fluência, que agora não foram consideradas. Assim, na verificação da segurança dos pilares considerou-se a acção do peso próprio dos

pilares e tabuleiro, restante carga permanente do tabuleiro e sobrecargas rodoviárias regulamentares do RSA.

### 5.3.3.2. Combinação de acções

Considerou-se a seguinte combinação de acções nas análises efectuadas:

$$S_d = 1,35 S_{pp} + 1,5 (S_{rcp} + S_{sc} + S_{fren}) \quad (5-2)$$

### 5.3.3.3. Imperfeições geométricas

Tal como aconteceu anteriormente, as excentricidades devidas às imperfeições geométricas foram consideradas de acordo com o definido na expressão (3-33) do EC2.

**Quadro 5-56 – Valor das excentricidades iniciais a considerar no dimensionamento dos pilares**

Pilar	$l$ (m)	$l_0$ (m)	$\Theta_i$ (m <sup>-1</sup> )	$e_i$ (m)
P1	32,0	64,0	$1,77 \times 10^{-3}$	0,057
P2	50,0	100,0	$1,41 \times 10^{-3}$	0,071
P3	21,3	42,7	$2,17 \times 10^{-3}$	0,046

### 5.3.4. Análise física e geometricamente não linear

#### 5.3.4.1. Modelação da estrutura e critérios de segurança

Foram elaborados modelos destinados à análise física e geometricamente não linear dos pilares P1, P2 e P3 considerados isoladamente.

Consideraram-se os mesmos critérios de segurança do exemplo anterior.



### 5.3.4.2. Descrição do modelo utilizado

Na figura seguinte apresenta-se o modelo estrutural adoptado, em que os pilares foram considerados isolados. As acções horizontais foram distribuídas pelos pilares proporcionalmente à sua rigidez elástica.

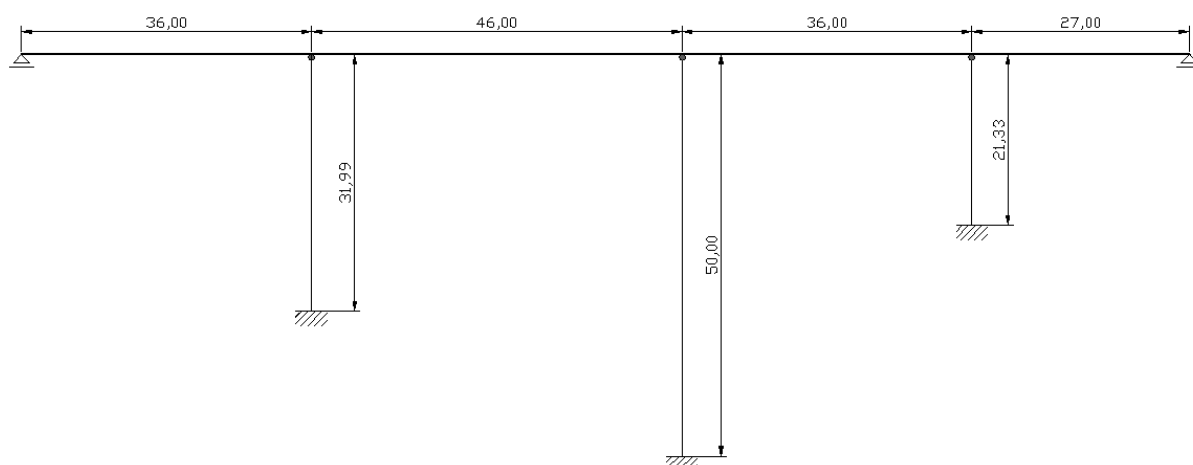


Figura 5-14 – Modelo de cálculo adoptado para a estrutura.

### 5.3.4.3. Resultados

Apresentam-se no Quadro 5-57 os esforços na base dos pilares (esforço axial e momento flector) obtidos no final da AFGNL.

Quadro 5-57 – Resumo dos resultados da análise não linear

Pilar	AFGNL dos pilares isolados	
	$N_{Sd}$ (kN)	$M_{Sd}$ (kN.m)
P1	-30699	7249
P2	-30699	7203
P3	-30699	12594

### 5.3.5. Análise pelos métodos simplificados do EC2

Apresentam no Quadro 5-58 os esforços nos pilares resultantes de uma análise linear de primeira ordem, considerando também os pilares isoladamente.

**Quadro 5-58 – Resumo dos esforços de 1ª ordem nos pilares**

Pilar	Esforço axial	Momento flector	
		Combinação quase permanente	Combinação fundamental
	$N_{Sd}$ (kN)	$M_{0Qp}$ (kN.m)	$M_{0Sd}$ (kN.m)
P1	-30699	2210	6472
P2	-30699	905	4110
P3	-30699	4071	12070

#### 5.3.5.1. Verificação da necessidade de consideração dos efeitos de segunda ordem

Tal como referido anteriormente, a verificação da necessidade de consideração de efeitos de segunda ordem é efectuada através do critério da esbelteza limite (expressão (2-9)). Os valores da esbelteza e do seu valor limite para os diferentes pilares, bem como dos diversos parâmetros necessários ao seu cálculo, são apresentados nos quadros seguintes.

**Quadro 5-59 – Cálculo da esbelteza**

Pilar	$i$ (m)	$l_0$ (m)	$\lambda$
P1	0,965	64,0	66,3
P2	0,965	50,0	103,6
P3	0,965	42,7	44,2

**Quadro 5-60 – Cálculo do coeficiente de fluência efectivo**

Pilar	$\varphi_{(\infty;t(0))}$	$M_{0Qp}$ (kN.m)	$M_{0Sd}$ (kN.m)	$\varphi_{ef}$
P1	2,3	2210	6472	1,1
P2	2,3	905	4110	1,1
P3	2,3	4071	12070	0,8

**Quadro 5-61 – Esbelteza limite**

Pilar	$\varphi_{ef}$	$\Omega$	A	B	C	N	$\lambda_{lim}$
P1	1,1	0,23	0,82	1,21	0,7	0,25	27,7
P2	1,1	0,23	0,82	1,21	0,7	0,25	27,7
P3	0,8	0,23	0,85	1,21	0,7	0,25	28,6

De seguida apresenta-se um quadro comparativo com a esbelteza de cada pilar e a esbelteza limite.

**Quadro 5-62 – Comparativo entre a esbelteza e a esbelteza limite**

Pilar	$\lambda$	$\lambda_{lim}$
P1	66,3	27,7
P2	103,6	27,7
P3	44,2	28,6

Da comparação resulta que é necessário considerar os efeitos de segunda ordem em todos os pilares.

### 5.3.5.2. Método da rigidez nominal

Os valores para rigidez nominal são apresentados no quadro seguinte, tendo sido calculados de acordo com a expressão ( 3-1).

**Quadro 5-63 – Cálculo da rigidez nominal**

Pilar	$K_c$	$E_{cd}$ (GPa)	$I_c$ (m <sup>4</sup> )	$K_s$	$E_s$ (GPa)	$I_s$ (m <sup>4</sup> )	$EI$ (kN.m <sup>2</sup> )
P1	0,04	25,5	4,87	1	200	0,0646	20341467
P2	0,06	25,5	4,87	1	200	0,0646	25308867
P3	0,03	25,5	4,87	1	200	0,0646	19099617

Os coeficientes  $K_s$  e  $K_c$  foram obtidos com base nas expressões ( 3-2) e ( 3-3).

Os esforços de primeira ordem foram recalculados considerando para cada pilar a rigidez nominal, por forma a obterem-se os efeitos da fendilhação, fluência e da não linearidade do comportamento dos materiais.

**Quadro 5-64 – Esforços de 1ª ordem recalculados**

Pilar	$N_{sd}$	$M_{0sd}$
P1	-30699	6472
P2	-30699	4110
P3	-30699	12070

No quadro seguinte apresenta-se o cálculo dos momentos de dimensionamento.

**Quadro 5-65 – Cálculo dos momentos de dimensionamento**

Pilar	$l_0$ (m)	$EI$ (kN.m <sup>2</sup> )	$N_B$ (kN)	$N_{sd}$ (kN)	$\frac{\beta}{N_B / N_{sd} - 1}$	$M_{0sd}$ (kN.m)	$M_{sd}$ (kN.m)
P1	64,0	20341467	-49045	-30699	2,06	6472	19 834
P2	100,0	25308867	-24979	-30699	-6,62	4110	Não aplicável
P3	42,7	19099617	-103582	-30699	0,52	12070	18 342

O método não é aplicável ao pilar P2 uma vez que a carga de dimensionamento  $N_{sd}$  é superior à carga limite de encurvadura  $N_B$ .

### 5.3.5.3. Método da curvatura nominal

A curvatura considerada para a determinação da excentricidade de segunda ordem, cujos valores se apresentam no Quadro 5-66, foram estimadas através da expressão ( 3-21).

**Quadro 5-66 - Determinação da excentricidade de segunda ordem.**

Pilar	n	n <sub>u</sub>	K <sub>r</sub>	λ	β	K <sub>φ</sub>	1/r <sub>0</sub> (m <sup>-1</sup> )	1/r (m <sup>-1</sup> )	l <sub>o</sub> (m)	e <sub>2</sub> (m)
P1	32 379	27 643	0,90	66,30	0,08	1,09	0,00202	0,00220	64,0	0,90
P2	63 945	62 006	2,02	103,63	-0,17	1,00	0,00202	0,00202	100,0	2,02
P3	24 220	13 568	0,44	44,21	0,23	1,20	0,00202	0,00243	42,7	0,44

A curvatura base (1/r<sub>0</sub>) e os coeficientes K<sub>r</sub> e K<sub>φ</sub> foram obtidos através das expressões ( 3-27), ( 3-22) e ( 3-25), respectivamente.

Já que as armaduras do pilar não se encontram concentradas em lados opostos, mas parte delas está distribuída nas faces paralelas ao plano de flexão, a altura útil foi estimada através da seguinte expressão do EC2,

$$d = (h / 2) + i_s = 2,8/2 + 0,999 = 2,40 \text{ m}$$

onde i<sub>s</sub> representa o raio de giração da totalidade da armadura.

#### ***Determinação do momento de dimensionamento***

Os esforços de dimensionamento, incluindo efeitos de segunda ordem, foram determinados utilizando as expressões ( 3-19) e ( 3-20), apresentando-se no Quadro 5-67 os valores obtidos para cada pilar.

**Quadro 5-67 - Determinação dos esforços de dimensionamento**

<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>0Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>e<sub>2</sub> (m)</b>	<b>M<sub>2</sub> (kN.m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-30699	6472	0,90	27643	34115
P2	-30699	4110	2,02	62006	66116
P3	-30699	12070	0,44	13568	25638

### 5.3.6. Comparação dos resultados obtidos pela AFGNL e pelos métodos simplificados do EC2

Apresenta-se no Quadro 5-68 um resumo comparativo dos esforços de dimensionamento (esforço axial e momento flector) obtidos nas três análises efectuadas.

**Quadro 5-68 - Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos - esforços actuantes de cálculo**

	AFGNL dos pilares isolados		Método da estimativa da rigidez nominal (pilares isolados)		Método da estimativa da curvatura (pilares isolados)	
<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-30699	7249	-30699	19 834	-30699	34115
P2	-30699	7203	-30699	N.A.	-30699	66116
P3	-30699	12594	-30699	18 342	-30699	25638

Como se pode observar, existe novamente uma grande diferença entre os esforços obtidos pelos métodos simplificados propostos no EC2 e os calculados nas AFGNL, sendo que neste caso não é aplicável o método da rigidez nominal.

No Quadro 5-69 apresentam-se os esforços obtidos pelos métodos simplificados de análise e as excentricidades equivalentes de 2ª ordem que lhe estão associados.

**Quadro 5-69 – Excentricidades equivalentes de 2ª ordem**

	Método da estimativa da curvatura			
<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>2</sub> (kN)</b>	<b>e<sub>2</sub> (m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-30699	27643	0,90	34115
P2	-30699	62006	2,02	66116
P3	-30699	13568	0,44	25638

### 5.3.7. Análise dos resultados obtidos pelos métodos simplificados considerando a globalidade da estrutura

#### 5.3.7.1. Ponderação simples das excentricidades de segunda ordem

Para os esforços obtidos da estimativa da curvatura, tem-se o seguinte valor da média simples das excentricidades de 2ª ordem,

$$e_{2m} = \frac{0,90 + 2,02 + 0,44}{3} = 1,12m$$

conduzindo aos esforços de dimensionamento apresentados na tabela seguinte.

**Quadro 5-70 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação simples das excentricidades dos diferentes pilares**

	Método da estimativa da curvatura com a excentricidade média			
<b>Pilar</b>	<b>N<sub>Sd</sub> (kN)</b>	<b>e<sub>2m</sub> (m)</b>	<b>M<sub>2</sub> (kN)</b>	<b>M<sub>Sd</sub> (kN.m)</b>
P1	-30699	1,12	34406	40878
P2	-30699	1,12	34406	38515
P3	-30699	1,12	34406	46475

### 5.3.7.2. Ponderação das excentricidades de segunda ordem de acordo com a rigidez

No Quadro 5-71 são apresentados os esforços de dimensionamento considerando a média ponderada das excentricidades de 2ª ordem.

**Quadro 5-71 – Esforços de dimensionamento considerando a ponderação global das excentricidades dos diferentes pilares**

			Método de análise global ponderada		
			Estimativa da curvatura		
Pilar	N <sub>Sd</sub> (kN)	k (kN/m)	e <sub>2mk</sub> (m)	M <sub>2</sub> (kN)	M <sub>Sd</sub> (kN.m)
P1	-30699	15174	0,630	19342	25814
P2	-30699	3974	0,630	19342	23451
P3	-30699	51187	0,630	19342	31411

### 5.3.8. Comparação dos resultados obtidos pelos diversos métodos

Após a determinação dos efeitos de segunda ordem pelos métodos simplificados do EC2, considerando os pilares isoladamente, e aplicando aos resultados as ponderações decorrentes do comportamento global da estrutura, é possível agora efectuar uma comparação com os resultados obtidos na AFGNL dos pilares isolados no Quadro 5-72.



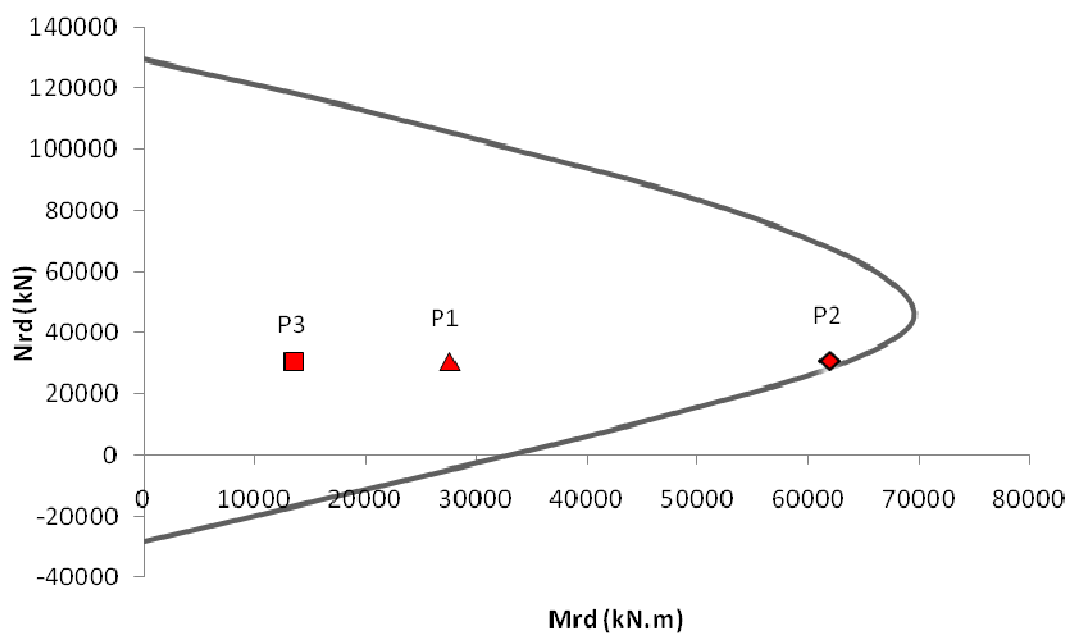
**Quadro 5-72 – Resumo geral dos resultados**

Pilar	Método geral	Estimativa da curvatura		
	Análise física e geometricamente não linear	Análise dos pilares isolados	Análise global simples	Análise global ponderada
	<b>M<sub>Sd</sub></b> <b>(kN.m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub></b> <b>(kN.m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub></b> <b>(kN.m)</b>	<b>M<sub>Sd</sub></b> <b>(kN.m)</b>
P1	7249	34115	40878	25814
P2	7203	66116	38515	23451
P3	12594	25638	46475	31411

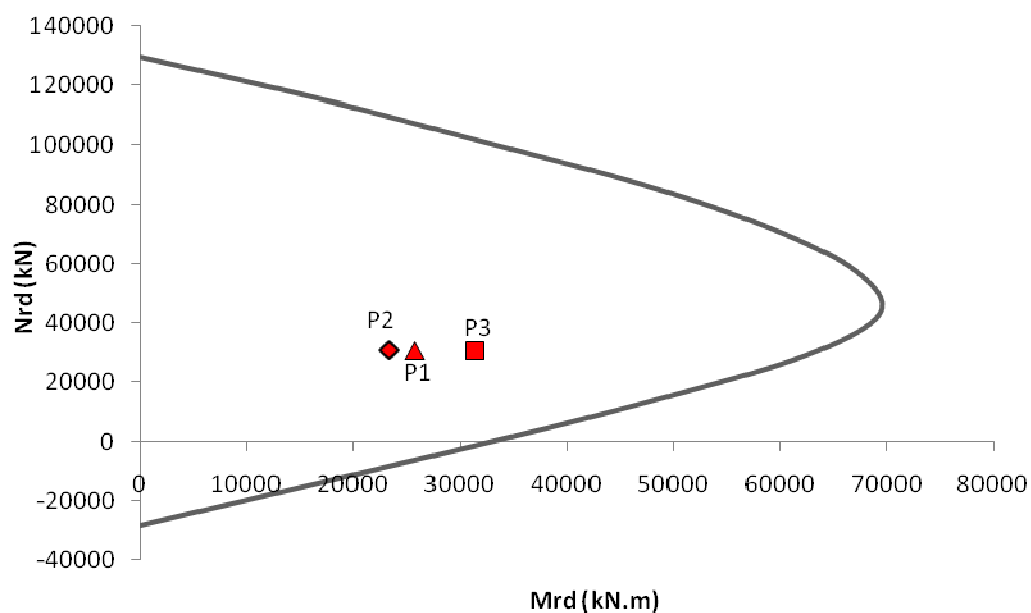
Analisando os resultados apresentados no Quadro 5-72 pode verificar-se que o método que apresenta resultados mais próximos dos obtidos na AFGNL é o da estimativa da curvatura, considerando ainda a análise global ponderada da estrutura.

### 5.3.9. Verificação da capacidade resistente

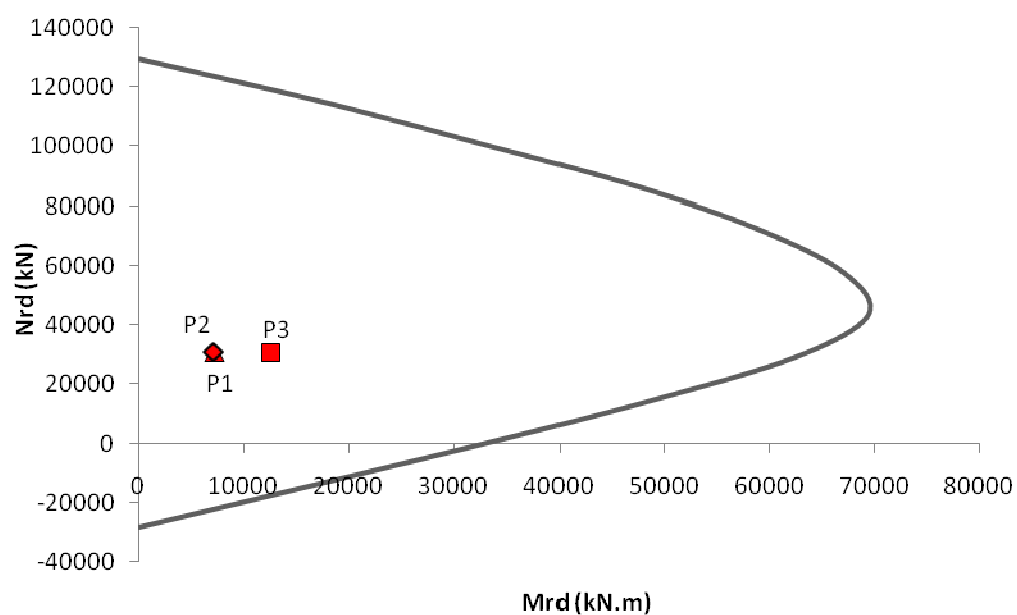
Nas figuras seguintes apresentam-se os diagramas de interacção  $M_{Rd}-N_{Rd}$  e os esforços de dimensionamento obtidos nas três análises. Com o método simplificado do EC2 pode observar-se que o pilar mais alto (P2) se encontra no limite da sua capacidade resistente. No entanto, pode verificar-se nas duas figuras seguintes que a secção da base de todos os pilares tem uma grande reserva de resistência relativamente aos esforços calculados pelo método da análise global ponderada e na AFGNL, permitindo que a secção pudesse ser, eventualmente, optimizada.



**Figura 5-15 – Diagrama de interação  $M_{Rd} - N_{Rd}$ , com representação dos esforços resultantes da análise dos pilares isolados pelo método da estimativa da curvatura.**



**Figura 5-16 – Diagrama de interação  $M_{Rd} - N_{Rd}$ , com representação dos esforços resultantes da análise global ponderada.**



**Figura 5-17 – Diagrama de interação  $M_{Rd} - N_{Rd}$ , com representação dos esforços resultantes da análise não linear.**



## 6. CONCLUSÕES

As metodologias simplificadas propostas no EC2 para a verificação de segurança de pilares de betão armado não são, em geral, adequadas para o caso das pontes. Os dois métodos simplificados propostos de determinação dos efeitos de 2ª ordem consideram os pilares como isolados, não apresentando qualquer tipo de recomendação para a sua aplicação a pórticos com pilares de diferentes alturas, o que acontece frequentemente nas pontes.

Os métodos propostos no EC2 para a determinação de efeitos de segunda ordem em elementos comprimidos dependem exclusivamente das características intrínsecas do elemento em análise, nomeadamente geométricas, propriedades dos materiais e esforços. O resultado da aplicação destes métodos traduz-se na consideração de um momento adicional de segunda ordem, resultante de uma excentricidade adicional.

Quando os pilares das estruturas porticadas de nós móveis apresentam alturas distintas, como é o caso geral das pontes, o resultado da aplicação destes métodos traduz-se na consideração de excentricidades adicionais distintas de pilar para pilar, o que, em regra, não é fisicamente possível, visto que os pilares se encontram contraventados entre si ao nível dos nós de ligação ao tabuleiro. Decorre disto que os pilares mais altos são penalizados em termos de esforços de dimensionamento, acontecendo o inverso com os pilares mais curtos. Isto contraria a realidade física, pois a distribuição dos esforços nos pilares de pórticos é proporcional à rigidez destes elementos, sendo mais rígidos os mais curtos. Efectivamente, relativamente a uma análise de pilares isolados, os efeitos globais de segunda ordem vão penalizar os pilares mais curtos pois têm uma menor flexibilidade para acompanhar os deslocamentos globais da estrutura.

Nestas condições, propõe-se na tese uma técnica complementar de análise que considera a média ponderada das excentricidades de segunda ordem obtidas pelos métodos simplificados do EC2, tendo em conta a rigidez de cada pilar. A técnica consiste no cálculo de um valor ponderado da excentricidade global a considerar em todos os pilares a partir da rigidez e da excentricidade de cada um dos pilares considerado isoladamente. Esta técnica tem semelhanças com a proposta na BS 8110, onde é estabelecida uma média simples das excentricidades de segunda ordem dos diferentes pilares considerados isoladamente.

Como se pode constatar nos três exemplos de aplicação apresentados, nos quais foram comparados os resultados de análises física e geometricamente não lineares (AFGNL) com os obtidos através da aplicação dos métodos simplificados propostos no EC2, pode-se concluir, genericamente, que os esforços calculados com os métodos simplificados são muito maiores que os obtidos nas AFGNL.

Deve referir-se que a utilização do método da rigidez nominal depende da verificação prévia da carga máxima de encurvadura, calculada pela fórmula de Euler considerando uma rigidez reduzida para inclusão dos efeitos da fendilhação e da fluência, o que limita o seu campo de aplicação a pilares pouco esbeltos, o que acontece com frequência em pontes e viadutos.

Quanto aos resultados obtidos com os métodos simplificados do EC2 pode-se concluir que o método da rigidez nominal é o que apresenta resultados mais próximos das AFGNL, quando comparado com o método da curvatura nominal. Este último método, apesar de ser de utilização mais simples e incondicionada, penaliza em demasia os pilares mais esbeltos. Esta conclusão já havia sido tirada com a utilização do método de verificação da segurança do REBAP em relação ao estado limite último de encurvadura, que também se baseia na curvatura nominal.

Os resultados obtidos no presente trabalho mostram que se consegue uma aproximação, relativamente aos resultados conseguidos com métodos de AFGNL, quando se utilizam critérios de ponderação das excentricidades calculadas pelos métodos do EC2 para os pilares isolados. Com o tipo de ponderação global proposta nesta tese a melhoria é mais significativa do que usando uma média simples das excentricidades dos diferentes pilares isolados, particularmente no caso de estruturas com pilares com grandes diferenças de altura.

Como referido, afigura-se interessante a utilização da técnica complementar proposta nesta tese. No entanto, carece ainda da realização de testes em muito mais casos práticos, para que se possa ganhar a confiança necessária na sua utilização corrente.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almeida, M. – *Análise física e geometricamente não linear em pilares de pontes*. Dissertação de mestrado (pré-Bolonha), Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2004.

Barros, M.H.F.M.; Ferreira C.; Barros, A.F.M. - *Integração do diagrama de tensões de compressão do betão em flexão desviada usando a equação do MC90*. Revista Construlink, Vol. 1, Nº 3, 2003.

British Standards Institution – *BS 8110 Structural use of concrete. Part 1: Code of practice for design and construction*, 1985.

*Eurocode 2: Design of concrete structures. Part1 : General rules and rules for buildings*. EN 1992-1-1, December 2004.

*Eurocode 2. Design of concrete structures. Concrete bridges*. EN 1992-2, December 2005.

Eurocode 2: Design of concrete structures. Part1 : General rules and rules for buildings - NP ENV 1992-1-1, Versão portuguesa– Abril 1998.

Falcão, J. - *Avaliação dos efeitos de 2ª ordem em estruturas de betão armado. Análise das propostas regulamentares* – Dissertação de mestrado (pré-Bolonha), Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2004.

Lima, J. A.; Monteiro, V.; Mun, M. – *Betão armado - Esforços normais e de flexão (REBAP – 83)*. 6ª edição, LNEC, 2004.

Marchão, C. - *Verificação da segurança de pilares de betão armado em pontes*. Dissertação de mestrado (pré-Bolonha), Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2006.

*REBAP - Regulamento de estruturas de betão armado e pré-esforçado*. Decreto-Lei nº 349-C/83, de 30 de Julho.

*RSA - Regulamento de segurança e acções para estruturas de edifícios e pontes. Decreto-Lei nº 235/83, de 31 de Maio.*

*SAP2000® - Static and dynamic finite element analysis of structures (V.11), 2007.*

*Westerberg, B. - Background to chapters 5.8, 5.9 and Annex H in EN 1992-1-1. Stockholm, 2002.*